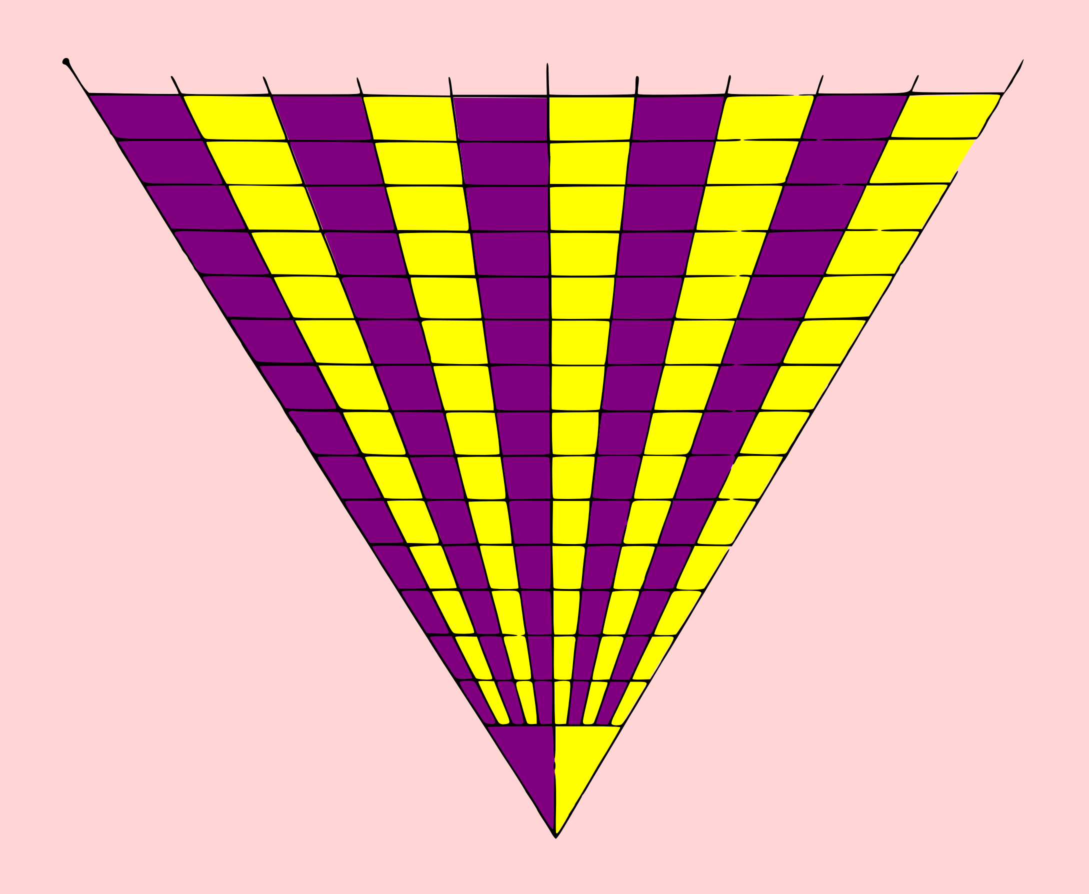
G. Khovanski

ÉLÉMENTS DE NOMOGRAPHIE



Éditions Mir Moscou


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Г. С. ХОВАНСКИЙ

ОСНОВЫ НОМОГРАФИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»,
МОСКВА

G. KHOVANSKI

ÉLÉMENTS DE NOMOGRAPHIE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par DJILALI EMBAREK

На французском языке

AVANT-PROPOS

Il existe actuellement une classe assez vaste de problèmes appliqués dont la solution la plus efficace est obtenue avec les abaques. Les abaques permettent de représenter sous une forme concise les fonctions de plusieurs variables et les tables à plusieurs entrées, ils donnent la solution de certaines équations transcendantes renfermant des paramètres variables ainsi que des systèmes de telles équations. La précision fournie est largement suffisante pour de nombreux problèmes. Dans le cas échéant les abaques peuvent être utilisés pour des calculs d'estimation. Les abaques ont par ailleurs l'avantage d'être peu onéreux, accessibles, d'un emploi simple, suggestifs et opérants. Les recherches entreprises pour la mise en place d'une maintenance mathématique pour le tracé automatique et le calcul des abaques avec des calculatrices rendront ces derniers encore plus accessibles.

Les abaques ne sont pas utilisés uniquement pour les calculs, ils permettent également d'étudier les relations fonctionnelles qui ont servi à les construire : par exemple de mettre en évidence l'influence de certains paramètres sur d'autres, de déterminer les extrémums et parfois même de découvrir de nouvelles propriétés. Ceci en fait un précieux outil dans la recherche.

Le présent ouvrage se propose d'initier le lecteur aux méthodes de la nomographie moderne et à ses possibilités. Il expose systématiquement et dans une forme accessible des méthodes de construction des abaques qui ont déjà fait leurs preuves de même que des méthodes nouvelles.

L'exposé est conçu dans un esprit nouveau qui utilise un champ binaire commun (réseau curviligne) pour le tracé des graphes des fonctions, les abaques à points alignés à champs binaires, l'échelle accolée, l'abaque à entrecroisement et diverses transformations d'abaques élémentaires et composés en abaques plus commodes à l'étude.

La plus grande attention a été attachée à la méthode de construction des abaques à points alignés, des abaques adaptés à points équidistants et au compas, des abaques barycentriques, de même qu'aux abaques composés des types cités. L'abaque général à transparent et

ses cas particuliers font l'objet du chapitre 13. Le chapitre 14 traite des liens de la nomographie avec les calculatrices ainsi que des derniers résultats obtenus.

Cet ouvrage s'adresse au public le plus large : chercheurs, programmeurs, ingénieurs, économistes, professeurs et élèves des instituts techniques, etc.

L'auteur tient à exprimer sa gratitude à I. Dénissiouk, E. Silaéva, ainsi qu'à S. Borissov, S. Goussev, Z. Dzémianko, T. Kouznétsova, D. Laptéva, G. Lipkina pour leurs conseils précieux et leur apport à l'édition de cet ouvrage.

G. KNOVANSKI

INTRODUCTION

La *nomographie* est la branche des mathématiques qui a pour objet la théorie et les méthodes de construction de graphiques cotés particuliers appelés *nomogrammes* ou *abaques*, qui permettent de résoudre des équations ou systèmes d'équations.

La nomographie (du grec *nomos*, loi, et *graphein*, écrire) veut dire représentation graphique d'une loi. Ce terme a été adopté par le Congrès international de mathématiques qui s'est tenu à Paris en 1890.

Tout abaque est constitué d'éléments simples : *échelles*, *champs binaires*, *familles de lignes*, *lignes* et *points*. On rencontre les échelles sur les doubles-décimètres, les thermomètres, dans divers appareils de physique. Un exemple type de champ binaire est le réseau de parallèles et de méridiens des cartes de géographie.

Le mode d'emploi d'un abaque est le suivant. Sur les échelles, champs ou familles de lignes on repère les points ou les lignes donnés. Ensuite on effectue les opérations géométriques simples indiquées dans le mode d'emploi pour déterminer un ou plusieurs points sur les échelles, champs ou familles de lignes, qui constituent la ou les solutions du problème étudié.

Les abaques qui donnent la ou les solutions par une seule opération géométrique sont dits *simples*. Les abaques constitués de plusieurs abaques du même type ou de type différent sont dits *composés*. Considérons des exemples d'abaques simples.

Exemple 1. La figure 1 représente l'abaque de l'équation en w

$$uw + v\,(e^{w} - 1) - we^{w} = 0,$$

que l'on rencontre en hydraulique des eaux souterraines. L'abaque est composé des échelles u, v et w. Pour résoudre cette équation il faut appliquer une règle sur les points donnés des échelles u et v et lire la réponse à l'intersection de la règle avec l'échelle w. Le pointillé représente la solution de cette équation pour $u = 2{,}5$; $v = 3{,}5$. La réponse est $w = 3{,}65$. Ce qui saute immédiatement aux yeux c'est, d'un côté, la complexité de l'équation et, en regard, la

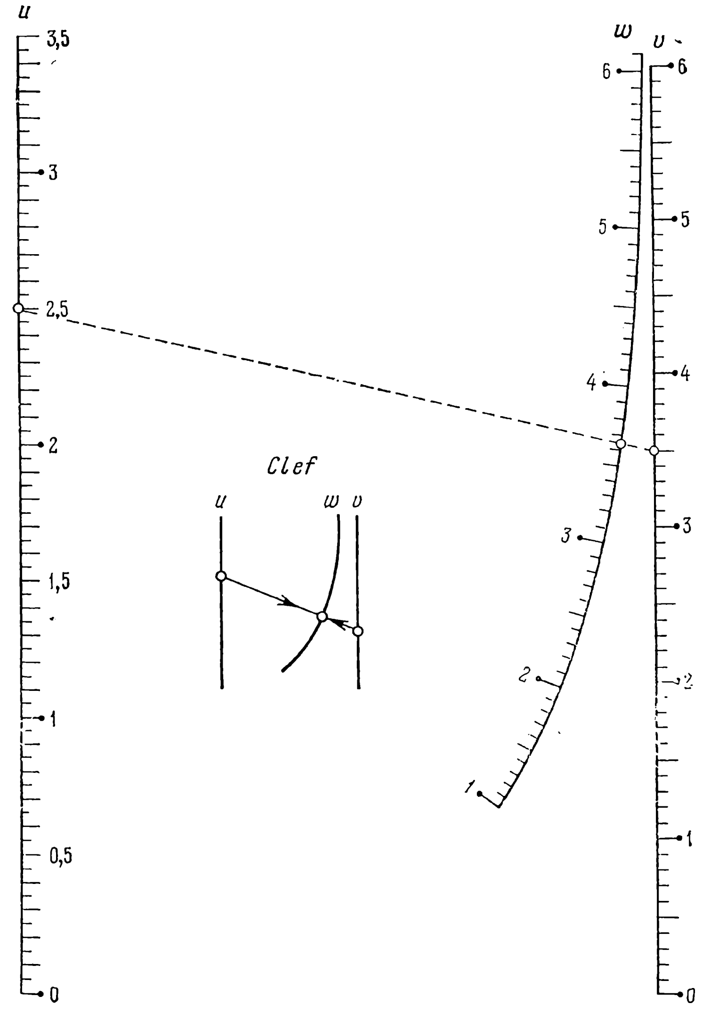


Fig. 1. Abaque pour l'équation $uw + v\,(e^w - 1) - we^w = 0$

simplicité de l'abaque et de son emploi. La méthode de construction de cet abaque est exposée au § 6.3.

Exemple 2. L'abaque de la figure 2 est celui de l'équation

$$t^{u-1} = v\,\frac{\ln\,(w-t)}{w-t-1}$$

dont on se sert pour calculer la température des tours de réfrigération à ventilation et contre-courant. Ici t est l'inconnue; u, v et w des paramètres variables. L'abaque est composé des échelles u et v et du champ binaire (w, t). On voit sur la clef que la réponse s'obtient

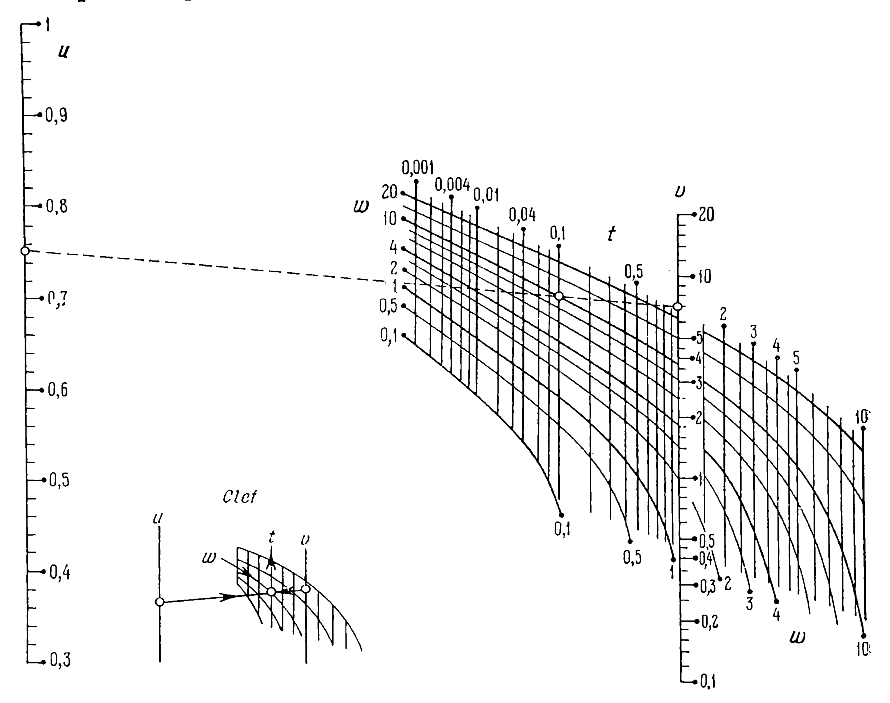


Fig. 2. Abaque pour l'équation $t^{u-1} = v \dfrac{\ln (w-t)}{w-t-1}$

par une seule application de la règle. La ligne en pointillé donne la solution $t = 0{,}1$ qui correspond à $u = 0{,}75$; $v = 7$; $w = 10$. La méthode de construction de l'abaque est donnée au § 6.11.

Exemple 3. La figure 3 représente 'abaque de l'équation en η_{cr}

$$\frac{\alpha Q^2}{9{,}81} = b^5 \frac{(1 + m\eta_{cr})^3 \, \eta^3_{cr}}{1 + 2m\eta_{cr}}$$

où α, b, m et Q sont des paramètres donnés. L'abaque est composé des trois champs binaires (α, b), (m, Q) et (m, η_{cr}). La solution η_{cr} s'obtient par une seule ouverture de compas. L'abaque représente la solution $\eta_{cr} = 0{,}3$ qui correspond au cas $\alpha = 1{,}1$; $b = 3$ m ; $m = 2$; $Q = 10$ m³/s. La méthode de construction figure au § 9.7.

Les abaques étaient utilisés dès les moyens âges sous forme d'appareils nomographiques. En 1884, Ocagne appliqua le principe de dualité à la construction d'abaques à points alignés [1]. Il jeta les fondements de la nomagraphie dans des travaux ultérieurs [2, 3, 4]. En 1906, N. Guersévanov proposa des abaques à points équidistants [5]. En 1912, Gronwal établit les conditions de représentabilité d'une équation à trois variables par un abaque rectiligne à entrecroisement

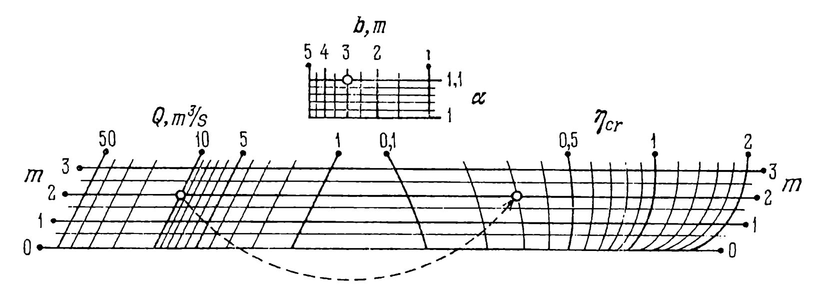


Fig. 3. Abaque pour l'équation $\frac{\alpha Q^2}{9{,}81} = b^5 \frac{(1+m\eta_{cr})^3\eta_{cr}^3}{1+2m\eta_{cr}}$

[6]. En 1921, Soreau publia ses recherches fondamentales sur la nomographie [7]. Margoulis publia ses travaux sur les abaques à transparent entre 1922 et 1931 [8, 9, 10]. En 1951, les Espagnols Lopez Nieto et Urselaj proposèrent des abaques barycentriques et rhomboïdaux [11, 12, 13].

L'évolution de la nomographie soviétique se rattache à N. Guersévanov, P. Melentiev, I. Denissiouk, N. Glagolev, A. Glagolev, M. Pentkovski, B. Nevski, I. Vilner et autres [14 à 25]. A l'heure actuelle c'est le département de nomographie du Centre de calcul de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. qui est chargé de mettre au point de nouvelles méthodes de nomographie et de construction d'abaques industriels [26 à 43]. Sous son égide sont tenus des séminaires permanents.

Des conférences de nomographie ont été organisées en Tchécoslovaquie en 1959 [44, 45], en 1964 [46] et en 1970 [47]. En U.R.S.S. la première conférence interuniversitaire de nomographie s'est tenue en 1965 [48].

On trouvera une bibliographie des travaux de nomographie dans [18, 20, 23, 29, 30, 31, 49, 50, 51].

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENTS DES ABAQUES

§ 1.1. Echelle

Les notions fondamentales de nomographie sont les notions de *point coté*, d'*échelle* et de *champ binaire*.

Un *point coté* est un point auquel on a affecté une ou plusieurs cotes numériques.

Une *échelle* est un ensemble de points cotés dépendant d'un seul paramètre. Désignons ce paramètre par α. L'*équation de l'échelle* α, dans un système de coordonnées rectangulaires, s'écrit:

$$x = f(\alpha), \quad y = g(\alpha), \tag{1.1}$$

où $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ sont des fonctions données du paramètre α.

Dans la suite, lorsqu'on se servira d'un système de coordonnées rectangulaires, on prendra 1 mm pour unité sur les deux axes. Par x et y, selon le contexte on entendra soit des segments, soit les nombres qui les expriment.

Supposons que dans les équations (1.1) le paramètre α est égal à α_0. Les coordonnées du point correspondant à cette valeur de α sont données par les formules

$$x_0 = f(\alpha_0), \quad y_0 = g(\alpha_0).$$

Le point de coordonnées x_0, y_0 est de cote α_0 (fig. 4).

Donnons maintenant au paramètre α des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ équidistantes (i.e. des valeurs choisies avec le même pas), calculons les valeurs correspondantes des coordonnées et construisons les points cotés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. En les reliant par une ligne continue on obtient l'échelle α (fig. 5). Cette ligne s'appelle *support de l'échelle.* On peut former son équation en excluant le paramètre α des équations (1.1). Le *sens de l'échelle* est le sens de croissance de ses cotes.

Il va sans dire qu'il est matériellement impossible de graduer chaque point. Sur le support de l'échelle on n'inscrit que les points de cote ronde à l'aide de traits appelés *traits support.* Les points intermédiaires sont marqués par des traits moins allongés. Pour faciliter la lecture on tracera des traits de longueur 2 mm; 3,5 mm et 5 mm. Les traits non cotés sont dits *muets.* On établit la cote d'un

trait muet par une interpolation sur les cotes rondes encadrant ce trait. L'ensemble des traits cotés et des traits muets forme la *graduation de l'échelle.*

Si l'on a à tracer des traits de longueur différente, on a intérêt à se servir d'un ruban de papier portant des droites parallèles distan-

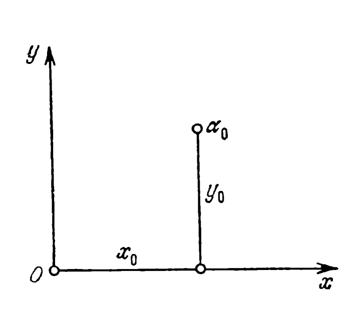


Fig. 4. Point de cote α_0

Fig. 5. Schéma de l'échelle α

tes de 2, 3,5 et 5 mm du bord (fig. 6). Ce ruban permet de tirer sans peine des traits de longueur différente sur le support de l'échelle.

On appelle *échelon* la différence de deux cotes rondes successives.

L'échelle se distingue par le fait qu'elle est partagée en un nombre peu élevé de sections dans les limites desquelles les échelons ont la même valeur. Les traits limitant ces sections doivent toujours être cotés.

Fig. 6. Bande de papier à parallèles pour l'inscription des traits

Les échelons sont des multiples de 1, 2 ou 5. Dans la pratique le minimum d'intervalle graphique doit être compris entre 1 et 5 mm. La meilleure solution est de prendre une longueur de 2 à 3 mm, moyennant quoi l'interpolation à vue se réalise aisément.

La graduation de l'échelle se fait en deux étapes. D'abord on se donne quelques valeurs de α, on calcule les coordonnées des points correspondants au moyen des équations (1.1) et on met en place l'esquisse de l'échelle. Ensuite d'après l'esquisse on juge du nombre nécessaire de points dont les coordonnées sont à déterminer.

Lorsqu'on travaille avec une échelle toute prête, on a deux problèmes à résoudre : le problème *direct* et le problème *inverse.*

Le *problème direct* consiste à positionner sur l'échelle un point d'après sa cote. Trois cas sont à distinguer : 1) le point figure avec

sa cote sur l'échelle, 2) le point figure sans sa cote sur l'échelle, 3) le point n'est pas figuré sur l'échelle.

Dans les deux premiers cas le problème se résout immédiatement, puisque le point cherché est marqué d'un trait. Dans le troisième cas, on cherche sur l'échelle deux traits encadrant le point donné que l'on positionne ensuite par une interpolation à vue.

Le *problème inverse* consiste à trouver la cote d'un point de l'échelle. Trois cas sont encore à distinguer : 1) le point coïncide avec un trait coté, 2) le point coïncide avec un trait muet, 3) le point est compris entre deux traits. Dans le dernier cas on détermine la cote du point par une interpolation à vue sur les cotes des traits extrêmes.

La graduation de l'échelle doit être telle qu'elle facilite au maximum la résolution des problèmes direct et inverse. Les abaques des figures 1 et 2 donnent un exemple d'échelles correctement graduées.

§ 1.2. Champ binaire

On appelle *champ binaire* un ensemble de points cotés dépendant de deux paramètres. Désignons les paramètres de cet ensemble par α et β. Dans un système de coordonnées rectangulaires xOy les *équations du champ binaire* s'écrivent alors

$$x = \quad (\alpha, \beta), \quad y = g(\alpha, \beta). \tag{1.2}$$

On suppose que les fonctions f et g sont telles que dans le domaine donné de variation des variables, à tout couple de valeurs de α et β est associé un couple de valeurs de x et y et un seul.

En donnant aux variables α et β des valeurs quelconques α_0 et β_0, on détermine à l'aide des formules (1.2) les coordonnées x_0 et y_0 du point correspondant du champ. En construisant ce point et en le graduant α_0 et β_0, on obtient un point coté du champ. Les autres points se construisent de façon analogue.

Le champ binaire (α, β) se présente pratiquement sous la forme d'un réseau constitué d'une famille de lignes α et d'une famille de lignes β. Tout point du champ binaire est l'intersection de lignes α et β de cotes données. Les hypothèses faites sur les propriétés des fonctions f et g entraînent que : 1) la famille de lignes α n'est pas crunodale, 2) la famille de lignes β ne l'est pas non plus, 3) toute ligne α coupe toute ligne β en un point et un seul.

Le champ binaire peut être considéré comme une généralisation de l'échelle. Si l'on pose $\beta = \beta_0$ dans les équations du champ binaire (1.2), on obtient les équations de l'échelle α pour β donné, savoir

$$x = f(\alpha, \beta_0), \quad y = g(\alpha, \beta_0).$$

Construisons (cf. fig. 7) l'échelle α pour les valeurs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ de β. Joignons ensuite les points de l'échelle α de même cote par une

ligne que l'on affectera de cette cote. On obtient ainsi le champ binaire (α, β) (cf. fig. 8) composé des familles de lignes cotées α et β.

Le champ binaire se construit comme une échelle. La distance entre des lignes voisines est légèrement plus grande qu'entre des traits voisins d'une échelle, plus exactement de 2 à 10 mm. Les

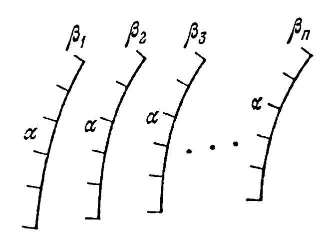


Fig. 7. Schéma d'échelles α tracées pour des valeurs fixes de β

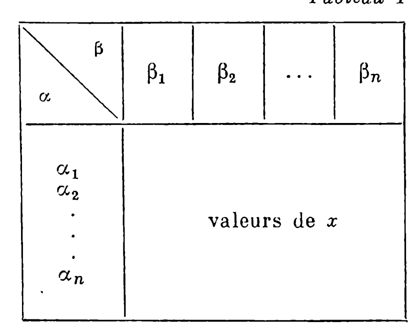
Fig. 8. Schéma du champ binaire (α, β)

lignes correspondant aux cotes inscrites sont plus grasses. Les abaques des figures 2 et 3 nous donnent un exemple de champ binaire correctement tracé.

Pour construire le champ binaire (α, β) on choisit des valeurs support $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de α et des valeurs support $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ de β. Ensuite en se servant des équations (1.2) on dresse les tableaux 1 et 2 de valeurs de x et y.

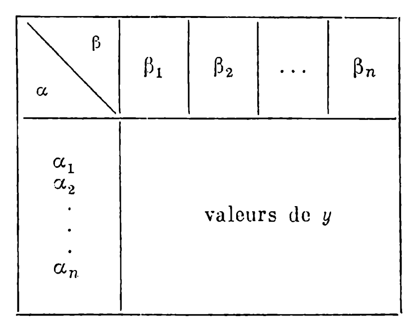
Les tableaux 1 et 2 nous permettent de construire des points du champ binaire que l'on joint par des lignes.

Tableau 1



α \ β	β_1	β_2	...	β_n
α_1, α_2, . . . α_n	valeurs de x			

Tableau 2



α \ β	β_1	β_2	...	β_n
α_1, α_2, . . . α_n	valeurs de y			

En éliminant alternativement les variables β et α entre les équations (1.2), on obtient les équations des familles de lignes α et β :

$$F_1(\alpha, x, y) = 0, \quad (1.3)$$

$$F_2(\beta, x, y) = 0. \quad (1.4)$$

On peut également construire le champ binaire en se servant des équations (1.3) et (1.4). Pour cela on se donne une série de valeurs de α, on détermine à partir de l'équation (1.3) les valeurs de x et y qui se correspondent pour ces α et on construit la famille de lignes α. On trace de façon analogue la famille de lignes β à l'aide de l'équation (1.4).

Lorsqu'on construit un champ binaire, on a parfois intérêt à se servir des équations de familles de courbes, *a fortiori* si celles-ci sont de forme simple, par exemple des équations d'une famille de droites.

On a commencé à solliciter les calculateurs pour le calcul et la construction des échelles et des champs binaires d'abaques (cf. § 14.6).

§ 1.3. Echelles rectilignes

On appelle *échelle rectiligne* une échelle dont le support est une droite. On supposera que le support de l'échelle rectiligne α coïncide avec l'axe des abscisses. L'équation de l'échelle α s'écrit

$$x = f(\alpha).$$

L'échelle α définie par cette équation s'appelle *échelle fonctionnelle* contrairement á l'échelle *métrique* ou *régulière* ou *arithmétique* où

$$x = \alpha.$$

Une échelle fonctionnelle est *logarithmique* si $f(\alpha) = \log \alpha$, *quadratique* si $f(\alpha) = \alpha^2$, *des puissances* si $f(\alpha) = \alpha^n$, où n est une constante.

Dans les abaques, on rencontre assez souvent l'échelle de la fonction homographique

$$f(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d},$$

où a, b, c et d sont des constantes. Cette échelle porte également le nom d'*échelle projective* car elle peut être obtenue par la projection d'une échelle métrique rectiligne sur une droite à partir d'un point.

L'équation de l'échelle rectiligne α se présente ordinairement sous la forme

$$x = mf(\alpha),$$

où m est un paramètre appelé *module de l'échelle*. Lorsque $f(\alpha) = 0$, l'abscisse $x = 0$. Lorsque $f(\alpha) = 1$, l'abscisse $x = m$. Il s'ensuit que le module de l'échelle est un segment mesuré en mm, correspondant à la variation de la fonction dans l'unité.

Supposons que la fonction $f(\alpha)$ est strictement monotone croissante et que

$$\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2.$$

Désignons par L la longueur de l'échelle α, comprise entre les points cotés α_1 et α_2. Il vient

$$L = x_2 - x_1,$$

où

$$x_1 = mf(\alpha_1), \quad x_2 = mf(\alpha_2).$$

En portant les expressions de x_1 et x_2 dans celle de L, on obtient

$$L = m[f(\alpha_2) - f(\alpha_1)].$$

De là on tire le module m tel que l'échelle α soit de longueur L entre α_1 et α_2. On a

$$m = \frac{L}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}$$

§ 1.4. Réseaux fonctionnels rectilignes

Les *réseaux fonctionnels* sont une autre dénomination des champs binaires. Introduisons les modules m et n dans l'équation du champ binaire (1.2). Ces équations s'écrivent alors

$$x = mf(\alpha, \beta), \quad y = ng(\alpha, \beta)$$

On a parfois intérêt à préparer à l'avance et à imprimer des réseaux fonctionnels correspondant à diverses fonctions f et g et à diverses valeurs des modules m et n. C'est d'ailleurs ce que l'on fait depuis longtemps. Les réseaux fonctionnels ainsi imprimés portent parfois le nom de *papier fonctionnel.*

Les réseaux les plus courants sont définis par les équations

$$x = mf(\alpha), \quad y = ng(\beta).$$

Les réseaux *métriques*, *logarithmiques* et *semi-logarithmiques* sont le plus souvent mis en œuvre. Leurs équations s'écrivent respectivement

$$x = m\alpha, \qquad y = n\beta;$$

$$x = m \log \alpha, \quad y = n \log \beta;$$

$$x = m\alpha, \qquad y = n \log \beta.$$

On trouve également dans le commerce [52] du papier logarithmique et semi-logarithmique pour diverses limites et divers modules, des réseaux triangulaires, du papier en coordonnées polaires, toute sorte de papier pour le contrôle de la qualité de la production, des canevas de probabilité, du papier sinusoïdal, des réseaux transformés par projection pour le choix des paramètres des formules empiriques.

Il existe également en vente du papier logarithmique dont le module est de 100 mm sur les deux axes. Dans le papier semi-logarithmique le module de l'échelle logarithmique est aussi de 100 mm,

mais le module de l'échelle métrique peut être quelconque car celle-ci n'est pas graduée. La distance entre deux droites consécutives est 1 mm, i.e. comme sur du papier millimétré ordinaire.

§ 1.5. Echelle métrique

L'équation de l'échelle métrique est

$$x = m\alpha, \qquad (1.5)$$

où m est le module de l'échelle.

L'échelle métrique se caractérise par le fait que l'échelon y est constant: il est de 1 mm dans un double-décimètre.

L'autre particularité de l'échelle métrique est qu'une même erreur géométrique Δx entraîne en tout point de l'échelle une même erreur absolue $\Delta\alpha$. En effet, de l'équation de l'échelle (1.5) il s'ensuit que

$$\Delta x = m\Delta\alpha,$$

d'où

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{m},$$

i.e. l'erreur absolue est proportionnelle à l'erreur géométrique et inversement proportionnelle au module de l'échelle.

Exemple 4. Construisons l'échelle métrique α de module $m = 43{,}2$ mm, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

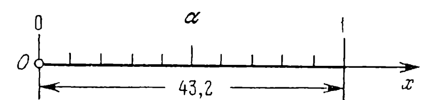


Fig. 9. Echelle métrique de module 43,2 mm entre 0 et 1

L'équation de l'échelle α s'écrit

$$x = 43{,}2\alpha.$$

Dressons le tableau 3 des valeurs de x avec un pas de 0,1 pour α.

Tableau 3

α	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
x	0	4,3	8,6	13,0	17,3	21,6	25,9	30,2	34,6	38,9	43,2

Traçons l'axe Ox (cf. fig. 9) et à partir du point O menons les segments 0 ; 4,3 ; 8,6 ; ... ; 43,2 mm. Inscrivons près des points d'abscisses 0 et 43,2 les cotes 0 et 1.

§ 1.6. Méthodes simplifiées de construction d'échelles métriques

Triangle d'échelles métriques. Si l'on veut tracer rapidement des échelles métriques de modules divers, on a intérêt à se servir du *triangle d'échelles métriques.* Celui-ci se construit de la sorte. On

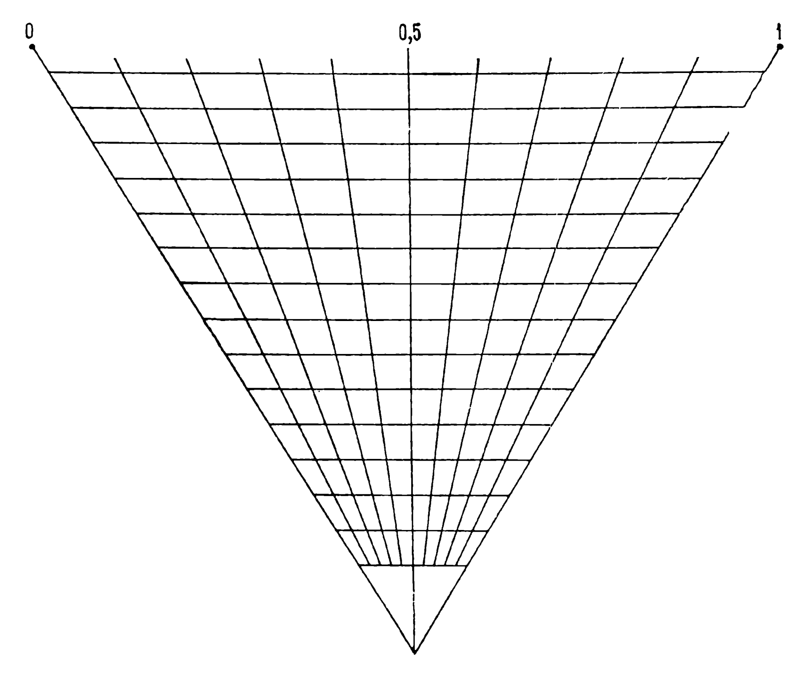


Fig. 10. Triangle des échelles métriques

prend une échelle métrique quelconque, par exemple de module 100 mm entre 0 et 1 (cf. fig. 10) ; on choisit en dehors de cette échelle un point arbitraire que l'on joint aux points de l'échelle par des droites; ensuite on trace des droites équidistantes de 5 mm, parallèles au support de l'échelle. Le triangle d'échelles métriques obtenu permet de construire sans peine une échelle métrique de 0 à 1, avec un module quelconque compris entre 15 et 100 mm.

Exemple 5. Construisons une échelle métrique de module $m = 83$ mm entre 0 et 1.

Prenons une bande de papier et traçons deux traits distants de 83 mm. Affectons la cote 0 au trait de gauche et la cote 1 à celui de

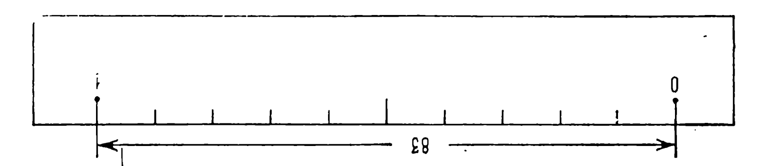


Fig. 11. Echelle métrique de module 83 mm entre 0 et 1

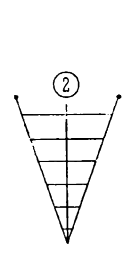


Fig. 12. Triangle d'échelles métriques pour la bissection d'un intervalle

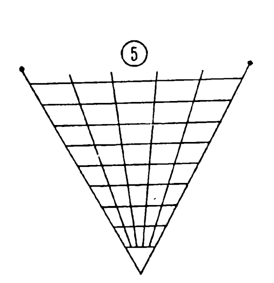


Fig. 13. Triangle d'échelles métriques pour la division d'un intervalle en cinq parties égales

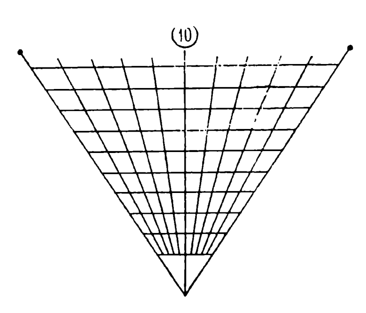


Fig. 14. Triangle d'échelles métriques pour la division d'un intervalle en dix parties égales

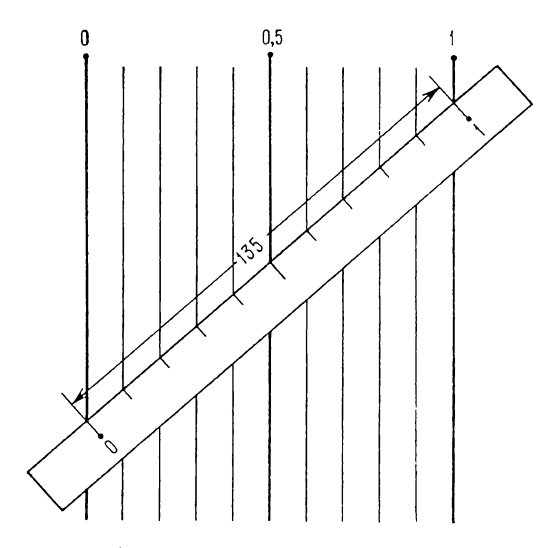


Fig. 15. Construction d'une échelle métrique de module 135 mm entre 0 et 1 à l'aide d'une famille régulière de droites parallèles

droite. Appliquons cette bande sur le triangle d'échelles métriques de la figure 10 de telle sorte que son bord soit parallèle à la directrice, que le trait de gauche coïncide avec le rayon 0 et celui de droite avec le rayon 1. Marquons ensuite sur le bord du papier les points d'intersection avec les autres rayons et construisons l'échelle (cf. fig. 11).

Pour tracer des traits intermédiaires sur une échelle métrique on a souvent à diviser l'intervalle entre deux traits en deux, cinq ou dix parties. En vue d'effectuer cette opération, on a intérêt à utiliser les petits triangles d'échelles métriques à trois, six et onze rayons représentés sur les fig. 12, 13 et 14.

Famille régulière de droites parallèles. Pour construire des échelles métriques de modules différents, on peut se servir de *familles de droites parallèles.* A noter qu'on perd un peu en précision car le module de l'échelle à construire est toujours supérieur à celui de la famille de droites parallèles. La figure 15 représente une telle famille, construite à l'aide d'une échelle métrique de module $m = 100$ mm, entre 0 et 1.

Exemple 6. Construisons une échelle métrique de module $m = 135$ mm entre 0 et 1.

Marquons sur une bande de papier deux traits distants de 135 mm. Graduons 0 le trait de gauche et 1 celui de droite. Appliquons cette bande sur la famille de droites parallèles de telle sorte que le trait gauche vienne en coïncidence avec la droite cotée 0 et le trait de droite avec la droite cotée 1 (fig. 15). Marquons les points d'intersection du bord de la bande avec les autres droites parallèles.

Le papier millimétré et semi-logarithmique contient des familles régulières de droites parallèles toutes prêtes.

§ 1.7. Echelle logarithmique

Pour établir une échelle logarithmique α on aura recours à son équation

$$x = m \log \alpha,$$

où m est le module de l'échelle. De cette équation il vient

1) pour $\alpha = 1$ $\log \alpha = 0$ et $x = 0$;

2) pour $\alpha = 10$ $\log \alpha = 1$ et $x = m$.

De là il résulte que le module de l'échelle logarithmique α est la longueur de segment de l'échelle d'extrémités les points de cotes 1 et 10.

Exemple 7. Construisons l'échelle logarithmique α de module $m = 100$ mm entre 1 et 10.

L'équation de l'échelle α s'écrit

$$x = 100 \log \alpha.$$

Tableau 4

α	$\log \alpha$	x	α	$\log \alpha$	x
1	0	0	6	0,778	77,8
2	0,301	30,1	7	0,845	84,5
3	0,477	47,7	8	0,903	90,3
4	0,602	60,2	9	0,954	95,4
5	0,699	69,9	10	1	100

Dressons le tableau 4 à l'aide de la table des logarithmes pour calculer les valeurs de $\log \alpha$ pour α compris entre 1 et 10 de 1 en 1.

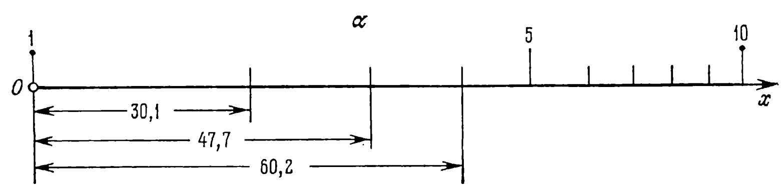


Fig. 16. Construction d'une échelle logarithmique α de module 100 mm entre 1 et 10

Traçons la droite support de l'échelle. Choisissons l'origine O, le sens positif étant celui indiqué par la flèche sur la figure 16. Au point O traçons un trait surmonté d'un rond et inscrivons la cote 1

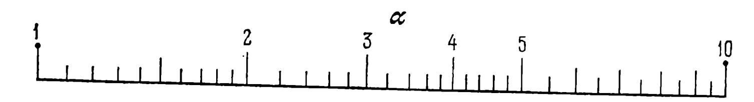


Fig. 17. Echelle logarithmique α de module 100 mm entre 1 et 10

(pour $\alpha = 1$, $x = 0$). Ensuite à partir de O et dans le sens positif, portons, en vertu du tableau 4, les distances 30,1 ; 47,7 ; 60,2 mm etc., et marquons les points obtenus d'un trait. Cotons 5 et 10 les traits correspondant à ces valeurs de α.

On construit de façon analogue des intervalles plus fins. De 1 à 2 on peut tracer des traits de 0,1 en 0,1 ; de 2 à 5 de 0,2 en 0,2 ; de 5 à 10 ajouter des traits correspondant aux valeurs 5,5 ; 6,5, etc. On obtient alors l'échelle de la figure 17.

L'échelle logarithmique se distingue par une sorte de *périodicité* due au fait que la distance entre les points cotés α_1 et α_2 dépend

uniquement du rapport de ces cotes. En effet, la distance L de deux points cotés α_1 et α_2 est donnée par la formule

$$L = m \log \alpha_2 - m \log \alpha_1,$$

i.e.

$$L = m \log \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Exemple 8. Sur l'échelle logarithmique, les distances entre les points de cotes 1 et 2 ; 2 et 4 ; 5 et 10 ; 10 et 20 ; 20 et 40 ; 50 et 100 sont égales puisque le rapport des cotes est le même partout et égal à 2.

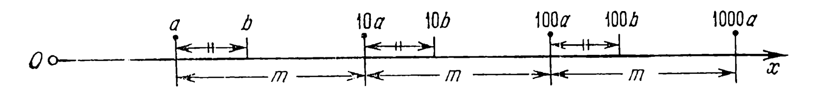


Fig. 18. Schéma d'une échelle logarithmique de module m entre a et 1000 a

Considérons sur l'échelle logarithmique une suite de points cotés a, $10a$, $100a$, $1000a$, etc. (fig. 18). Les distances de deux points con-

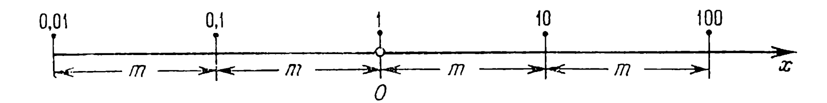


Fig. 19. Schéma d'une échelle logarithmique de module m entre 0,01 et 100

sécutifs de cette suite sont égales entre elles et au module m de l'échelle. En effet, la distance des points cotés a et 10 a est

$$L = m \log \frac{10a}{a} = m \log 10 = m,$$

la distance des points cotés 10 a et 100 a est

$$L = m \log \frac{100a}{10a} = m \log 10 = m, \text{ etc.}$$

Si maintenant l'on considère un nombre b quelconque compris entre a et 10 a, et que l'on marque sur l'échelle les points cotés b, 10 b et 100 b, on remarque que les distances entre les points cotés a et b, 10 a et 10 b, 100 a et 100 b seront égales pour la même raison. Il s'ensuit que l'échelle presentera la même graduation de a à 10 a, de 10 a à 100 a, de 100 a à 1000 a, etc. C'est précisément là que réside la « périodicité » de l'échelle logarithmique.

En particulier, si l'on pose a = 0,01, on obtient l'échelle de la figure 19. La graduation de l'échelle est la même de 0,01 à 0,1 ; de

0,1 à 1 ; de 1 à 10, de 10 à 100. D'où il résulte qu'il suffit de connaître la section d'échelle comprise entre 1 et 10 pour pouvoir construire toute l'échelle. Cette circonstance est mise à profit dans la pratique.

§ 1.8. Méthodes simplifiées de construction d'échelles logarithmiques

Canevas logarithmiques. Pour construire des échelles logarithmiques on se sert communément de *canevas logarithmiques* préparés d'avance, i.e. d'échelles logarithmiques de 1 à 10 avec divers modules, tracées sur des rubans de papier. La figure 20 représente un canevas logarithmique de module 100 mm. Sa présentation facilite le transfert des divisions sur le support de l'échelle.

Les règles à calcul peuvent également remplir le rôle de canevas logarithmiques. Dans les règles usuelles, les échelles ont des modules de 250, 125 et 250/3 mm.

Il existe en vente du papier logarithmique de module 100 mm sur les deux axes. On pourra donc utiliser ce papier comme échelle logarithmique de module 100 mm.

Triangle d'échelles logarithmiques. On se sert très souvent du *triangle d'échelles logarithmiques* pour tracer rapidement des échelles logarithmiques de divers modules. Le principe de ce triangle est le suivant. Traçons une échelle logarithmique, pour fixer les idées, de module 100 mm de 1 à 10, choisissons en dehors d'elle un point que l'on joindra aux points de l'échelle et menons ensuite des parallèles au support de l'échelle tous les 5 mm. On obtient un triangle d'échelles logarithmiques (fig. 21). On peut construire un tel triangle sur du papier logarithmique, en en assimilant la base à l'échelle tracée sur le papier.

Exemple 9. Construisons l'échelle logarithmique α de module 50 mm de 0,1 à 10.

L'équation de l'échelle α s'écrit

$$x = 50 \log \alpha.$$

Tableau 5

α	$\log \alpha$	x
0,1	−1	−50
1	0	0
10	1	50

Dressons le tableau 5 des valeurs de x pour les trois valeurs support de α : 0,1 ; 1 ; 10.

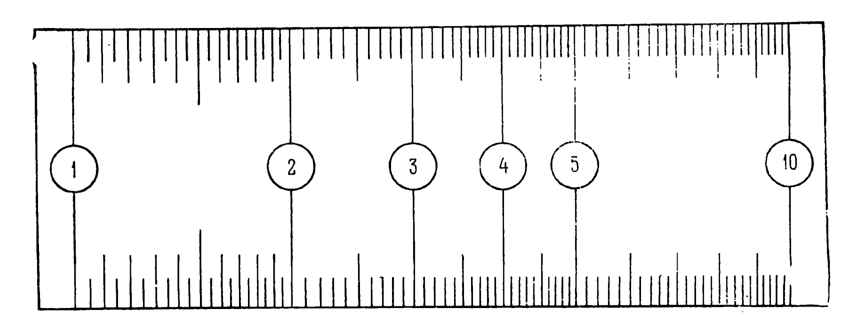


Fig. 20. Canevas logarithmique de module 100 mm

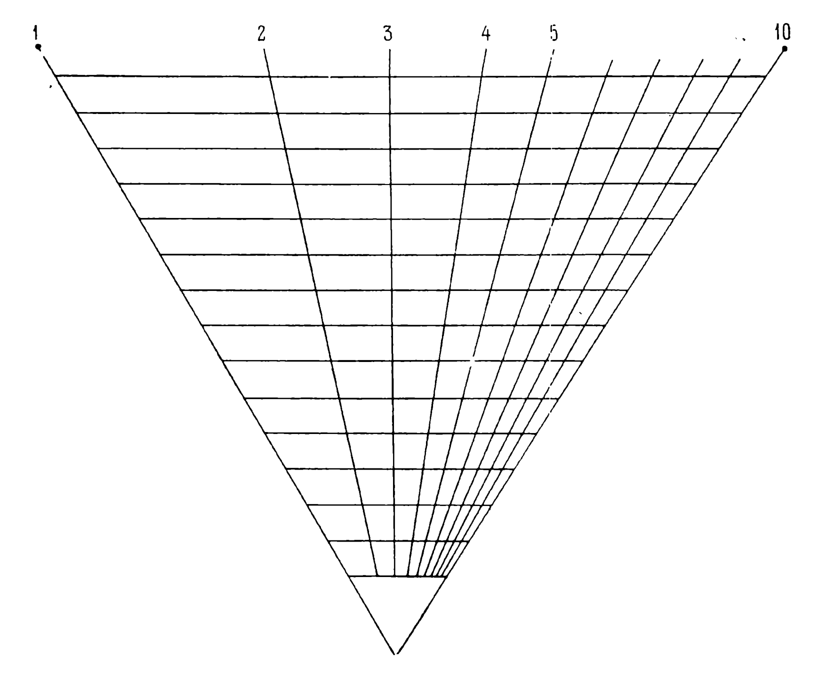


Fig. 21. Triangle d'échelles logarithmiques

Traçons l'axe Ox (fig. 22). En face du point O traçons un trait coiffé d'un rond et cotons-le 1. Menons deux traits coiffés d'un rond à 50 mm de part et d'autre du point O. Affectons la cote 0,1 au trait de gauche et la cote 10 à celui de droite.

Prenons une bande de papier et à l'aide du triangle d'échelles logarithmiques, construisons un canevas logarithmique de module 50 mm. Pour cela portons sur le papier deux traits distants de 50 mm et affectons la cote 1 au trait de gauche et la cote 10 à celui de droite. Appliquons le ruban de papier sur le triangle d'échelles logarithmiques parallèlement à la directrice et de telle sorte que le point coté 1 coïncide avec le rayon 1 et le point coté 10 avec le rayon 10. Marquons sur le bord du papier les points d'intersection avec les autres rayons et construisons l'échelle. On obtient ainsi le canevas de la figure 23. Utilisons-le pour graduer l'échelle α de 0,1 à 1 et de 1 à 10. On obtient l'échelle α de la figure 24.

Famille logarithmique de droites parallèles. Pour construire rapidement des échelles logarithmiques de modules différents, on peut futiliser une *famille logarithmique de droites parallèles.* Une telle amille est représentée sur la figure 25 de 1 à 10 à l'aide d'une échelle logarithmique de module 100 mm.

On trouve des familles logarithmiques de droites parallèles de module 100 mm sur le papier logarithmique et semi-logarithmique.

Exemple 10. Construisons l'échelle logarithmique α de module $m = 145$ mm de 1 à 10, à l'aide d'une famille logarithmique de droites parallèles.

Traçons sur une bande de papier deux traits distants de 145 mm et appliquons cette bande sur une famille logarithmique de droites parallèles (cf. fig. 25) de telle sorte que le trait de gauche vienne en coïncidence avec la droite cotée 1 et celui de droite avec la droite cotée 10. Marquons ensuite sur ce papier les points d'intersection de son bord avec les autres droites parallèles et construisons l'échelle.

Exemple 11. Construisons une échelle logarithmique α de 2 à 5, de module $m = 173$ mm, sur du papier logarithmique, en utilisant une famille logarithmique de droites parallèles.

Si l'on place l'origine de l'échelle logarithmique α au point coté α_1 l'équation de l'échelle α s'écrit

$$x = m (\log \alpha - \log \alpha_1)$$

En effet, pour $\alpha = \alpha_1$, on a $x = 0$. Dans notre cas $m = 173$ mm $\alpha_1 = 2$. L'équation de l'échelle α est donc

$$x = 173 (\log \alpha - \log 2)$$

Pour $\alpha = 2$, on obtient $x = 0$. Pour $\alpha = 5$,

$$x = 173 (\log 5 - \log 2) = 173 \log 2{,}5 = 173 \cdot 0{,}398 = 68{,}9 \text{ mm}.$$

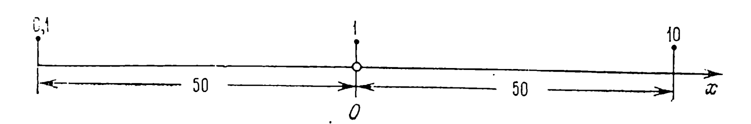


Fig. 22. Schéma d'une échelle logarithmique de module 50 mm entre 0,1 et 10

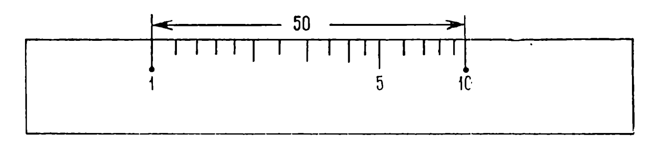


Fig. 23. Canevas logarithmique de module 50 mm

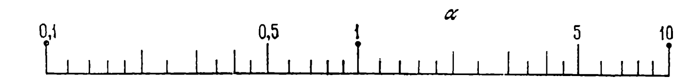


Fig. 24. Echelle logarithmique α de module 50 mm entre 0,1 et 10

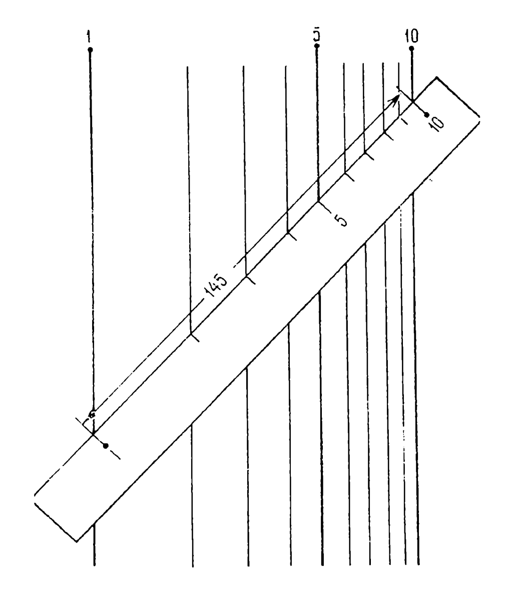


Fig. 25. Famille logarithmique de droites parallèles et sa construction à l'aide d'une échelle logarithmique de module 145 mm entre 1 et 10

Prenons une bande de papier et traçons deux traits distants de 68,9 mm. Affectons la cote 2 au trait de gauche et la cote 5 au trait de droite. Cherchons les droites cotées 2 et 5 sur le papier logarithmique et appliquons sur elles le papier de telle sorte que le point coté

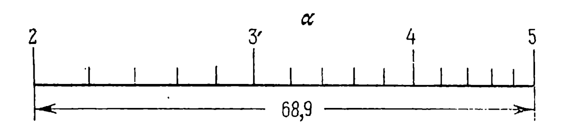


Fig. 26. Echelle logarithmique de module 173 mm entre 2 et 5 construite à l'aide d'une famille logarithmique de droites parallèles

2 tombe sur la droite cotée 2 et le point coté 5 sur la droite cotée 5. Marquons ensuite sur le papier les traits intermédiaires à l'intersection de son bord avec les autres droites parallèles. On obtient en définitive l'échelle α de la figure 26.

§ 1.9. Erreur de calcul introduite par une échelle logarithmique

L'échelle logarithmique α se distingue par le fait qu'en l'un quelconque de ses points, la quantité α est calculée avec une erreur

Fig. 27. Schéma de l'apparition sur une échelle logarithmique α d'une erreur $\Delta\alpha$ due à l'erreur géométrique Δx

relative constante. Soit donnée une échelle logarithmique α (cf. fig. 27) d'équation

$$x = m \log \alpha.$$

Supposons qu'en se servant de cette échelle on commette une erreur géométrique constante Δx. Au lieu de la valeur exacte α on lira donc sur l'échelle la valeur approchée $\alpha + \Delta\alpha$. De l'équation de l'échelle α il résulte

$$\Delta x = (m \log \alpha)'_{\alpha}\, \Delta\alpha = \frac{m\Delta\alpha}{\alpha \ln 10},$$

d'où

$$\Delta\alpha = \frac{\ln 10}{m}\, \alpha\Delta x,$$

ou

$$\Delta\alpha \approx \frac{2,30}{m}\,\alpha\Delta x.$$

En pour-cent l'erreur relative est donnée par la formule

$$\delta\alpha = 100\,\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$$

En y portant l'expression de $\Delta\alpha$ on obtient

$$\delta\alpha = \frac{230\Delta x}{m}\,\%.$$

La lecture de cette formule montre que l'erreur relative est définie, pour un module m donné, uniquement par l'erreur géométrique Δx et ne dépend pas de la position du point cherché sur l'échelle.

Exemple 12. Déterminons l'erreur relative affectant une échelle logarithmique de module 250 mm avec une erreur géométrique de 1 mm.

On a m = 250 mm, Δx = 1 mm. Il vient

$$\delta\alpha = \frac{230}{250}\cdot 1 = 0,92\%,$$

i.e. une erreur géométrique de 1 mm se traduit sur une échelle logarithmique de module 250 mm par une erreur relative d'environ 1 %.

§ 1.10. Echelle projective

On appelle *échelle projective* une échelle obtenue par la projection d'une échelle métrique (uniforme) à partir d'un centre P sur une droite (cf. fig. 28). Il est évident que par construction l'échelle métrique et l'échelle projective α auront à leur point d'intersection la même cote que nous désignerons par α_1.

Fig. 28. Schéma d'une échelle projective α obtenue par projection d'une échelle métrique α à partir d'un centre P sur l'axe Ox

Etablissons l'équation de l'échelle projective. Supposons que l'échelle métrique α est donnée par les équations

$$x_m = A_1\alpha + B_1,$$
$$y_m = A_2\alpha + B_2,$$

où A_1, B_1, A_2 et B_2 sont des constantes. Désignons par A et B les coordonnées du point P et par x_p et y_p les coordonnées des points de l'échelle projective. L'échelle projective coïncidant avec l'axe Ox on a $y_p = 0$. Par construction de l'échelle projective le point P, le point coté α de l'échelle métrique et le point coté α de l'échelle projective sont alignés, i.e. on a l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En portant dans cette équation la valeur $y_p = 0$ et les expressions de x_m et y_m et en résolvant l'équation obtenue par rapport à x_p, il vient

$$x_p = \frac{(AA_2 - BA_1)\,\alpha + AB_2 - BB_1}{A_2\alpha + B_2 - B}.$$

En remplaçant x_p par x et en posant $a = AA_2 - BA_1$, $b = AB_2 - BB_1$, $c = A_2$ et $d = B_2 - B$, on obtient l'équation de l'échelle projective

$$x = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}. \tag{1.6}$$

Le second membre est une fonction homographique. On supposera que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pour $c = 0$ l'échelle projective se transforme en échelle métrique.

Pour construire l'échelle projective définie par l'équation (1.6), on peut appliquer la méthode générale, i.e. dresser le tableau des valeurs de x dans les limites données de variation de α. Il existe cependant des méthodes plus économiques tirant parti des propriétés de l'échelle projective. Considérons deux d'entre elles.

Première méthode. On remarque sur la figure 28 que le point P peut être obtenu comme l'intersection de deux rayons projectifs quelconques. Dans l'équation (1.6) de l'échelle projective α, donnons à la variable α trois valeurs quelconques par exemple α_1, α_2 et α_3, et calculons les valeurs correspondantes de l'abscisse x, soit x_1, x_2, x_3. Construisons ces trois points de l'échelle projective α en portant sur l'axe Ox les abscisses x_1, x_2 et x_3 et affectons-les des cotes α_1, α_2 et α_3. Menons par le point coté α_1 une droite quelconque et construisons sur elle une échelle métrique de module convenable en la disposant de telle sorte que les points cotés α_1 se confondent sur les échelles projective et métrique. Menons des droites par les points cotés α_2 et α_3 sur les échelles métrique et projective. Leur intersection donnera le point P. A partir de P, projetons l'échelle métrique sur Ox et construisons l'échelle projective.

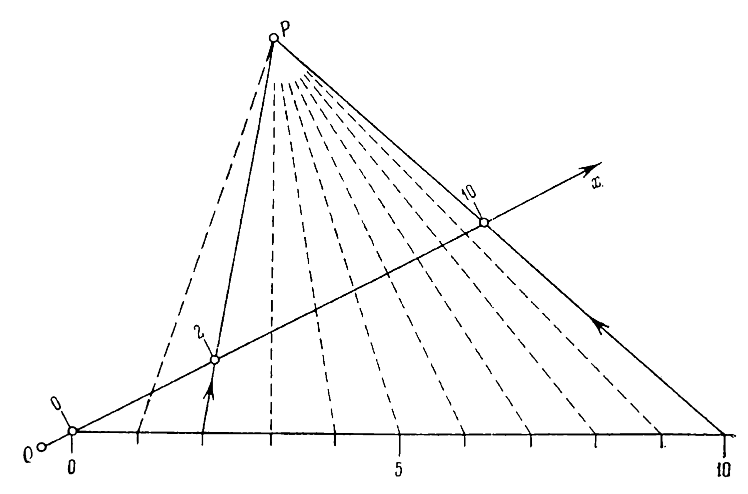


Fig. 29. Exemple de construction d'une échelle projective, dont trois points sont connus, à l'aide d'une échelle métrique auxiliaire

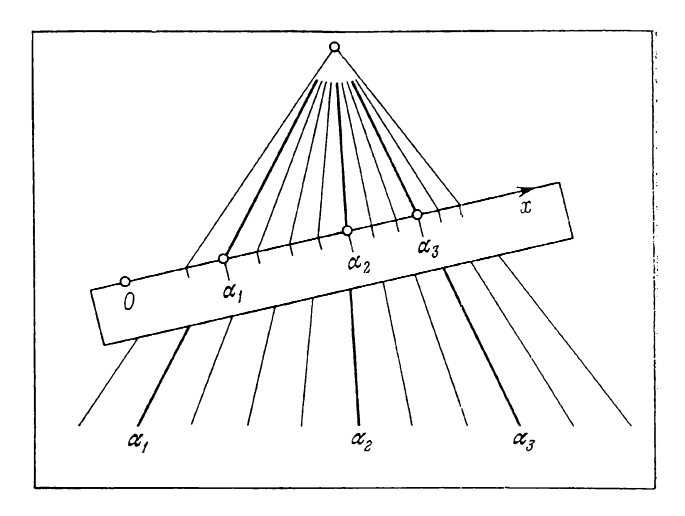


Fig. 30. Schéma de construction d'une échelle projective, dont trois points sont connus, à l'aide d'un faisceau régulier de droites et d'une feuille de papier

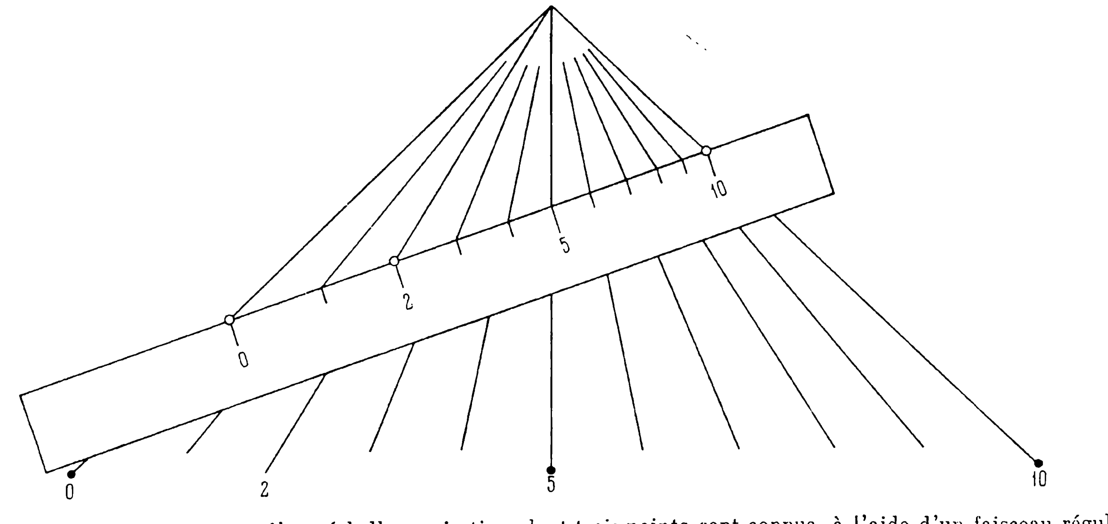


Fig. 31. Exemple de construction d'une échelle projective, dont trois points sont connus, à l'aide d'un faisceau régulier de droites et d'une feuille de papier

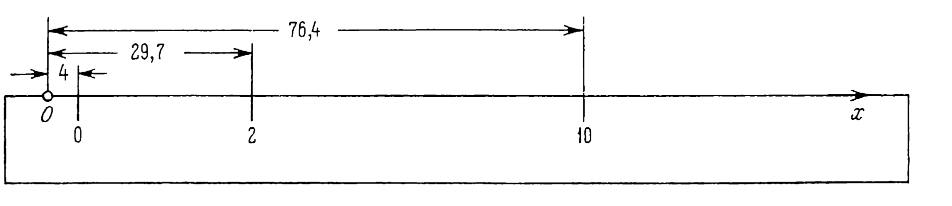


Fig. 32. Construction de trois points d'une échelle projective sur une bande de papier

Exemple 13. Construisons l'échelle projective α d'équation

$$x = \frac{41\alpha + 10}{0,3\alpha + 2,5}$$

de 0 à 10, de 1 en 1.

Supposons par exemple que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 10$. On a

$$x_1 = 4,0; \quad x_2 = 29,7; \quad x_3 = 76,4.$$

Traçons l'axe Ox (fig. 29) et marquons les points de l'échelle projective α de cotes 0 ; 2 ; 10 et de coordonnées $x_1 = 4$ mm ; $x_2 = 29,7$ mm ; $x_3 = 76,4$ mm. A partir du point coté 0 menons sous un angle convenable une droite et construisons sur elle l'échelle métrique α

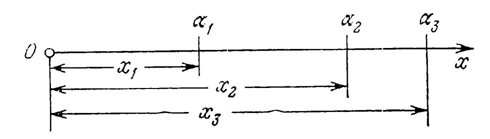


Fig. 33. Construction des points d'une échelle fonctionnelle α de cotes α_1, α_2, α_3

de 0 à 10 avec un module de 10 mm. Plaçons le point coté 0 au point de même cote de l'échelle projective α. Cherchons le point P d'intersection des droites passant par les points des deux échelles cotés 2 et 2, 10 et 10. A partir du point P projetons l'échelle métrique sur le support de l'échelle projective. Construisons l'échelle projective obtenue.

Deuxième méthode. Cette méthode est une variante de la précédente. Traçons sur une feuille de papier (fig. 30) un faisceau de droites équidistantes dans les limites de variation données de α. Marquons sur une bande de papier les points cotés α_1, α_2 et α_3 de l'échelle projective. En faisant glisser cette bande sur le faisceau de droites, on l'amène dans une position telle que le point α_1 tombe sur la droite α_1, le point α_2 sur la droite α_2, et le point α_3 sur la droite α_3. Marquons ensuite les points d'intersection des autres droites avec le bord de la bande et construisons l'échelle.

Exemple 14. Construisons par cette méthode l'échelle projective α dans le cas de l'exemple précédent.

Menons un faisceau de droites équidistantes α de 0 à 10 (fig. 31). Traçons sur le bord d'un ruban de papier l'axe Ox et marquons, après avoir calculé leurs coordonnées, les points de l'échelle projective de cotes $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 10$ (fig. 32). Faisons glisser le papier de la figure 32 sur le faisceau de droites de la figure 31 et trouvons une position telle que les points cotés 0, 2 et 10 tombent sur les rayons

du faisceau de mêmes cotes. Marquons ensuite les points d'intersection du bord du ruban avec les rayons et construisons l'échelle.

L'échelle projective est souvent utilisée pour la graduation approchée des échelles fonctionnelles sur de petits intervalles de variation de la variable. Supposons que pour l'échelle fonctionnelle donnée par l'équation

$$x = F(\alpha),$$

où $F(\alpha)$ est une fonction strictement monotone, on ait construit trois points (cf. fig. 33) cotés α_1, α_2 et α_3 d'après leurs coordonnées $x_1 = F(\alpha_1)$, $x_2 = F(\alpha_2)$, $x_3 = F(\alpha_3)$. Adoptons ces trois points pour points de l'échelle projective et traçons les traits intermédiaires par l'un des procédés décrits.

CHAPITRE 2

RÈGLES À PLUSIEURS CURSEURS

§ 2.1. Sur les abaques du type règle à calcul

Les ingénieurs ont très souvent affaire à des relations mettant en jeu plusieurs variables et se ramenant à la forme

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = 0, \qquad (2.1)$$

où $f_1 = f_1(\alpha_1)$, $f_2 = f_2(\alpha_2)$, etc.

Les *abaques du type règle à calcul à plusieurs curseurs* sont le mieux appropriés à l'étude de telles relations. Ils sont suggestifs et commodes à l'usage. Par ailleurs le principe de leur construction est

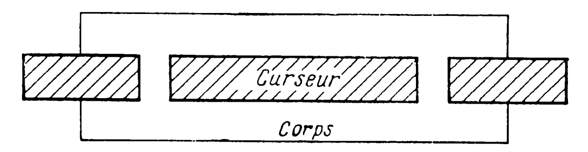


Fig. 34. Schéma de construction d'une règle en papier à un curseur

simple puisqu'ils sont constitués uniquement d'échelles rectilignes de même module pour les fonctions des équations (2.1). C'est pourquoi il est recommandé de commencer l'étude des méthodes nomographiques par ces abaques en premier.

Pour construire des règles à curseurs, le plus simple est d'utiliser du carton. La figure 34 représente une règle à un curseur en carton. On construirait de façon analogue des règles à plusieurs curseurs en carton. La construction décrite dans l'article [53] convient bien aux règles en plastique recouvertes d'une couche photographique.

§ 2.2. Règles à un curseur

La figure 35 représente un *abaque du type règle à calcul à un curseur.* L'abaque est constitué d'un *plan fixe* π ou *fond* et d'un *plan mobile*: le *curseur* π' qui peut glisser entre deux droites parallèles menées sur le plan π à une distance d l'une de l'autre. La largeur du curseur est aussi d. Sur des parallèles du plan π et les bords du curseur on

trace quatre échelles α_1, α_2, α_3 et α_4. L'abaque résout l'équation à quatre variables

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0. \quad (2.2)$$

Supposons que dans l'équation (2.2) la variable inconnue est α_4. Pour la déterminer à l'aide de l'abaque de la figure 35 on déplace le curseur π' de telle sorte que les points donnés sur les échelles α_1 et α_2 viennent en coïncidence, puis en face du point donné de l'échelle α_3 on lit la réponse α_4 sur l'échelle α_4.

Prouvons que l'abaque de la figure 35 représente réellement l'équation (2.2). Traçons sur les plans π et π' un système de coordonnées

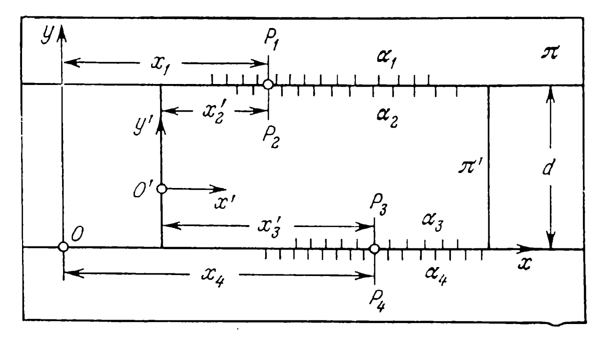


Fig. 35. Schéma d'un abaque du type règle à calcul à un curseur pour l'équation (2.2)

xOy et $x'O'y'$ comme sur la figure 35. Désignons par P_1 et P_2 les points communs des échelles α_1 et α_2, et par P_3 et P_4 ceux des échelles α_3 et α_4. Désignons respectivement par x_1, x'_2, x'_3 et x_4 les abscisses des points P_1, P_2, P_3 et P_4.

Exprimons l'abscisse x_4 en fonction des abscisses x_1, x'_2 et x'_3. De la figure 35 il vient

$$x_4 = x_1 - x'_2 + x'_3$$

ou

$$x_1 - x'_2 + x'_3 - x_4 = 0. \quad (2.3)$$

Dans l'équation (2.3), en posant

$$x_1 = f_1, \quad x'_2 = -f_2, \quad x'_3 = f_3, \quad x_4 = -f_4, \quad (2.4)$$

on obtient la forme (2.2).

Les équations des échelles de l'abaque de la relation (2.2) se déduisent à partir de la formule (2.4). Introduisons dans ces dernières les paramètres de transformation m, a_1, a_2 et a_3. A cet effet, met-

tons l'équation initiale (2.2) sous la forme

$$m\,(f_1 - a_1) + m\,(f_2 - a_2) + m\,(f_3 - a_3) + m\,(f_4 + a_1 + a_2 + a_3) = 0. \qquad (2.5)$$

Si maintenant dans l'équation (2.5) on pose

$$\bar{f}_1 = m\,(f_1 - a_1), \quad \bar{f}_2 = m\,(f_2 - a_2),$$
$$\bar{f}_3 = m\,(f_3 - a_3), \quad \bar{f}_4 = m\,(f_4 + a_1 + a_2 + a_3),$$

on obtient de nouveau une équation de la forme (2.2), mais avec d'autres fonctions

$$\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \bar{f}_3 + \bar{f}_4 = 0.$$

Les nouvelles équations des éléments de l'abaque s'écrivent: échelle α_1:

$$x_1 = m\,(f_1 - a_1);$$

échelle α_2:

$$x_2' = -m\,(f_2 - a_2);$$

échelle α_3:

$$x_3' = m\,(f_3 - a_3);$$

échelle α_4:

$$x_4 = -m\,(f_4 + a_1 + a_2 + a_3).$$

Elles se distinguent des équations initiales (2.4) par le fait qu'elles contiennent les paramètres de transformation. La projection de l'abaque consiste à choisir dûment les paramètres introduits.

Des équations des éléments de l'abaque il s'ensuit que toutes les échelles sont de même module m, module dont le choix permet de modifier les dimensions des échelles.

Si dans les équations (2.2) toutes les équations sont croissantes, les sens des échelles α_1, α_2, α_3 et α_4 doivent alterner. Ceci étant l'échelle α_1 doit être orientée de gauche à droite.

Les paramètres a_1, a_2 et a_3 étant à choisir arbitrairement on peut toujours s'arranger pour les prendre tels que les échelles de l'abaque soient disposées de façon commode. On peut par exemple placer l'échelle α_1 sur une section quelconque de la droite $y = d$ du plan π. Les échelles α_2 et α_3 peuvent être arbitrairement disposées sur les bords du curseur π'. Pour ce qui est de l'échelle α_4, sa place est déjà déterminée par celle des autres échelles.

Lorsqu'on construit un abaque, il n'est pas nécessaire d'introduire les systèmes de coordonnées xOy et $x'O'y'$ et de calculer les valeurs des paramètres a_1, a_2 et a_3; on peut se donner de façon convenable trois échelles des variables connues et déterminer la position de l'échelle cherchée ou échelle de résolution en résolvant un exemple numérique.

§ 2.3. Méthode de construction des règles à un curseur

De ce qui précède il résulte que pour construire des abaques du type de la figure 35 pour l'équation (2.2), il faut suivre la marche suivante.

1) On commence par ordonner les échelles. Supposons, par exemple, que la première en commençant par le haut est l'échelle α_1, la deuxième l'échelle α_2, la troisième α_3 et la quatrième l'échelle de résolution α_4.

2) On dessine le schéma de l'abaque, on inscrit le symbole des échelles et on oriente les échelles dans l'hypothèse que toutes les fonctions de l'équation (2.2) sont croissantes. Ensuite on inverse le sens des échelles des fonctions décroissantes si celles-ci existent.

3) On choisit le module m et on prépare les canevas des échelles pour les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 dans les limites données de variation des variables. Si parmi ces fonctions il en est qui sont linéaires, logarithmiques ou homographiques, la construction des canevas se simplifie, car elle peut être réalisée à l'aide des procédés graphiques examinés au chapitre 1.

4) On résout un exemple numérique, i.e. on se donne des valeurs convenables quelconques de α_1, α_2, α_3 dans le domaine de variation de ces variables et on calcule à l'aide des équations (2.2) la valeur correspondante de la variable de résolution α_4.

5) On choisit une disposition compacte des échelles α_1, α_2 et α_3 et on les trace. On détermine la position de l'échelle de résolution α_4 en se servant de l'exemple numérique. Pour cela on disposera le curseur π' de sorte à faire coïncider les points donnés des échelles α_1 et α_2. En face du point donné de l'échelle α_3 on marquera sur le plan π un point auquel on affectera la cote cherchée α_4. Ensuite à l'aide du canevas on trace l'échelle de résolution α_4 et on l'oriente convenablement.

Si l'équation (2.2) est de la forme

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0, \tag{2.6}$$

i.e. ne renferme que trois variables, dans l'abaque correspondant du type de la figure 35, l'une des échelles est remplacée par un point fixe. On peut le prendre sur le bord inférieur du curseur. L'équation (2.6) s'écrit dans ce cas

$$f_1 + f_2 + 0 + f_3 = 0.$$

Exemple 15. Construisons un abaque pour la formule

$$P = 50 + 0{,}75\,(T - 150) + 0{,}25\,(A - 20), \tag{2.7}$$

qui donne le poids optimal P d'un homme en fonction de sa taille T et de son âge A. Les variables évoluent dans les limites

$$150 \leqslant T \leqslant 190 \text{ cm}, \quad 20 \leqslant A \leqslant 80 \text{ ans}, \quad 50 \leqslant P \leqslant 90 \text{ kg}.$$

La formule (2.7) se ramène à la forme (2.6). L'abaque aura un seul curseur. Adoptons l'ordre suivant des échelles: T, A, P. En vertu de cet ordre mettons l'équation (2.7) sous la forme

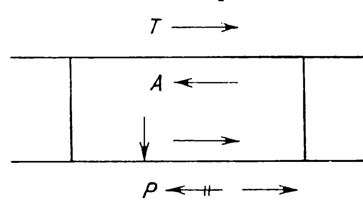


Fig. 36. Schéma d'une règle à un curseur pour la formule (2.7), les échelles sont orientées par les flèches

$$0{,}75\,(T - 150) + 0{,}25\,(A - 20) + + (-P + 50) = 0. \quad (2.8)$$

Dessinons l'abaque et traçons les flèches (fig. 36). Corrigeons le sens des flèches. Les échelles T et A sont correctement orientées, puisque les fonctions $0{,}75(T - 150)$ et $0{,}25\,(A - 20)$ sont croissantes. Barrons la flèche de l'échelle P et traçons une autre de sens contraire, puisque la fonction $(-P + 50)$ est décroissante.

Multiplions les deux membres de l'équation (2.8) par le module m, soit

$$0{,}75m\,(T - 150) + 0{,}25m\,(A - 20) + m\,(-P + 50) = 0$$

et posons

$$m_T = 0{,}75m, \quad m_A = 0{,}25m, \quad m_P = m.$$

Si l'on prend $m = 4$ mm, on obtient $m_T = 0{,}75 \cdot 4 = 3$ mm, $m_A = 0{,}25 \cdot 4 = 1$ mm et $m_P = 4$ mm.

Construisons les canevas des échelles métriques T, A et P à l'aide des équations

$$x = m_T\,(T - 150) = 3\,(T - 150),$$

$$x = m_A\,(A - 20) = A - 20, \quad x = m_P\,(P - 50) = 4\,(P - 50).$$

Les figures 37, 38 et 39 représentent des canevas tout prêts.

Dessinons encore le schéma de l'abaque en y indiquant les limites données de variation des variables et les modules des échelles (fig. 40).

Considérons un exemple numérique. On trouve que pour $T = 170$ cm et $A = 70$ ans la valeur de P est 77,5 kg.

Traçons deux parallèles distantes de 40 mm et portons sur elles à l'aide des canevas des figures 37 et 39 les échelles T et P en nous inspirant du schéma de la figure 40. Disposons les échelles T et P de telle sorte que leur milieu soit situé approximativement sur une même verticale. Construisons un curseur d'une largeur de 40 mm et sur son bord supérieur portons l'échelle A à l'aide du canevas de la figure 38. Déterminons le point fixe (la flèche verticale) sur

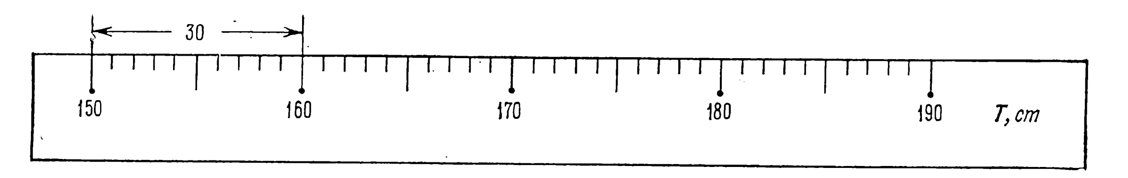


Fig. 37. Canevas de l'échelle métrique de la taille T de module 3 mm entre 150 et 190 cm

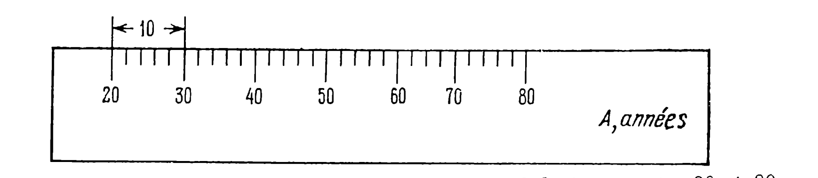


Fig. 38. **Canevas de l'échelle métrique de l'âge** A de module 1 mm entre 20 et 80 ans

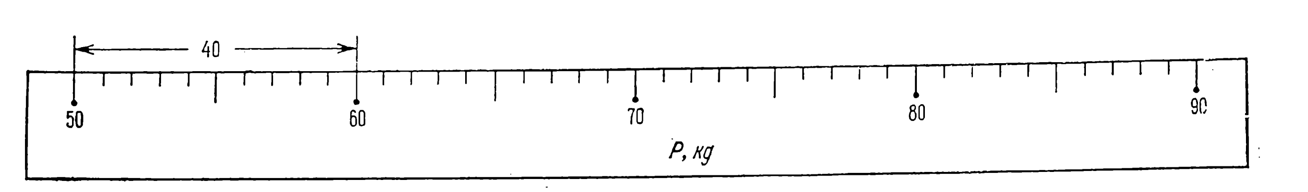


Fig. 39. Canevas de l'échelle métrique du poids P de module 4 mm entre 50 et 90 kg

le curseur d'après l'exemple numérique. A cet effet faisons coïncider les points des échelles T et A respectivement de cotes $T = 170$ cm et $A = 70$ ans et traçons sur le curseur une flèche en face du point de l'échelle P, coté $P = 77,5$ kg. On obtient l'abaque de la figure 41. La position du curseur correspond à l'exemple numérique suivant ($T = 170$ cm, $A = 70$ ans ; réponse $P = 77,5$ kg).

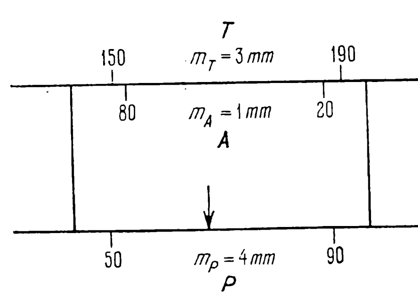


Fig. 40. Schéma d'une règle à un curseur pour la formule (2.7) avec indication des limites de variation des variables et des modules des échelles

Exemple 16. Construisons un abaque de la formule

$$v = \frac{184}{T^{0,2} t^{0,18} s^{0,35}}, \qquad (2.9)$$

qui détermine la vitesse de coupe v en fonction de la durée de vie T d'un instrument, de la profondeur de coupe t et de l'avancée s en un tour de broche. Les limites de variation sont

$$30 \leqslant T \leqslant 100 \text{ mn}; \qquad 0,5 \leqslant t \leqslant 10 \text{ mm};$$

$$0,1 \leqslant s \leqslant 2,5 \text{ mm/tour}; \quad 50 \leqslant v \leqslant 200 \text{ m/mn}.$$

En prenant le logarithme de l'équation (2.9), on obtient

$$\log v = \log 184 - 0,2 \log T - 0,18 \log t - 0,35 \log s. \qquad (2.10)$$

L'équation (2.10) est de la forme (2.2) et peut être représentée par une règle à un curseur. Adoptons l'ordre suivant des échelles: t, T, s, v. En vertu de cet ordre mettons l'équation (2.10) sous la forme

$$(-0,18 \log t) + (-0,2 \log T) + (-0,35 \log s) + (-\log v + \log 184) = 0.$$

Dessinons l'abaque (fig. 42). Toutes les flèches sont orientées dans le sens inverse puisque toutes les fonctions sont décroissantes.

Multiplions la dernière équation par m; on obtient

$$-0,18m \log t - 0,2m \log T - 0,35m \log s + m(-\log v + \log 184) = 0.$$

Désignons les modules des échelles logarithmiques t, T, s et v par m_t, m_T, m_s et m_v. On a $m_t = 0,18m$; $m_T = 0,2m$; $m_s = 0,35m$; $m_v = m$. Si l'on prend $m = 250$ mm, on obtient $m_t = 0,18 \cdot 250 = 45$ mm; $m_T = 0,2 \cdot 250 = 50$ mm; $m_s = 0,35 \cdot 250 = 87,5$ mm; $m_v = 250$ mm. Préparons des canevas logarithmiques de modules

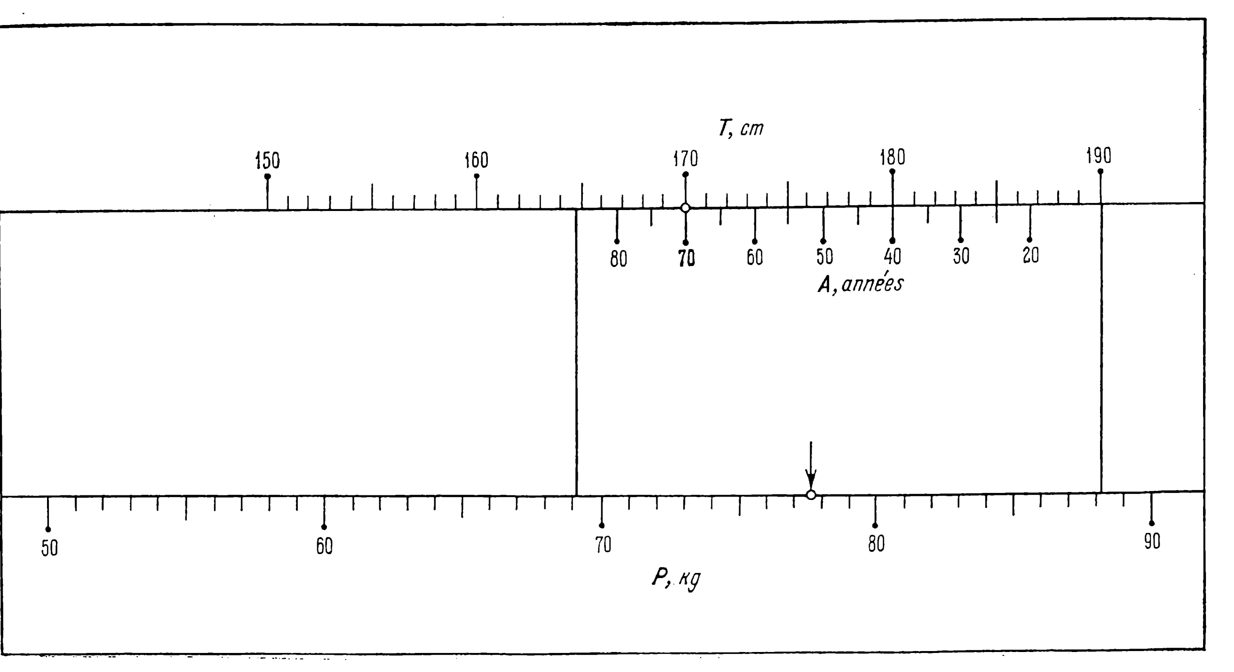


Fig. 41. Règle à un curseur pour la formule (2.7)

45 ; 50 ; 87,5 et 250 mm. Dessinons encore une fois l'abaque en y indiquant les limites de variation des variables et les modules des échelles (fig. 43).

Considérons un exemple numérique. Supposons que $t = 1$ mm, $T = 100$ mn, $s = 1$ mm/tour. La formule (2.9) donne

$$v = \frac{184}{100^{0,2} \cdot 1^{0,18} \cdot 1^{0,35}} = \frac{184}{2,51} = 73,3 \text{ m/mn}.$$

Prenons un curseur de 40 mm de largeur. Choisissons une position convenable des échelles t, T et s. Déterminons l'échelle v conformément à l'exemple numérique. On obtient en définitive l'abaque de la figure 44. La position du curseur correspond à l'exemple numérique (on donne $t = 1$ mm, $T = 100$ mn, $s = 1$ mm/tour; réponse $v = 73,3$ m/mn).

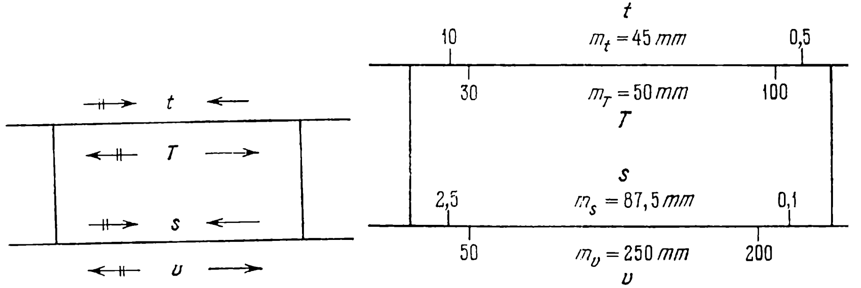


Fig. 42. Schéma d'une règle à un curseur pour la formule (2.9) avec indication du sens des échelles

Fig. 43. Schéma d'une règle à un curseur pour la formule (2.9) avec indication des limites de variation des variables et des modules des échelles

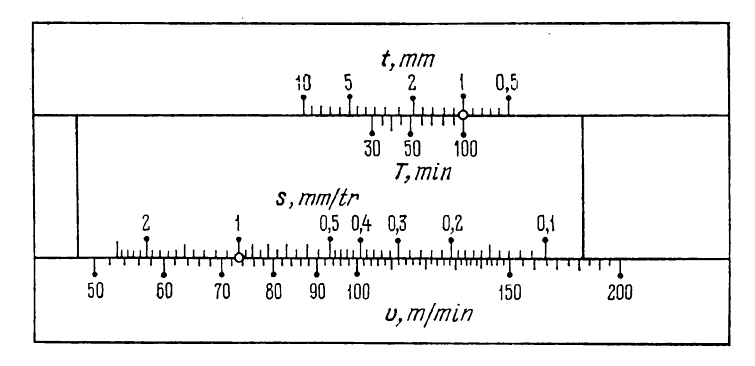


Fig. 44. Règle à un curseur pour la formule (2.9)

§ 2.4. Cas général de règles à plusieurs curseurs

La méthode de construction des règles à un curseur pour la relation (2.2) se généralise facilement à une équation de la forme (2.1) à n variables. L'équation (2.1) avec $n > 4$ peut être représentée par un *abaque du type règle à calcul à plusieurs curseurs.* L'abaque doit nécessairement comprendre 0,5 $(n - 2)$ curseurs pour n pair, et 0,5 $(n - 1)$ curseurs pour n impair. Dans le dernier cas l'échelle manquante est remplacée par un point fixe situé sur l'un des curseurs. On peut le placer sur le dernier curseur et le signaler par une flèche verticale. Lorsqu'on tracera sur l'abaque des flèches horizontales pour indiquer le sens des échelles, on prendra soin d'inscrire une flèche près du point fixe.

Exemple 17. Construisons l'abaque de la formule

$$M = \frac{C_c t \delta D s^{0,75}}{150\,000} \qquad (2.11)$$

qui donne le moment de torsion utile de la broche M en fonction de l'angle de coupe δ, du diamètre de la pièce à traiter D, de la profondeur de coupe t, de l'avancée s de l'outil en un tour de broche et du coefficient de coupe C_c. Les limites de variation sont

$$3 \leqslant C_c \leqslant 300 \text{ kg/mm}^2; \quad 4 \leqslant t \leqslant 40 \text{ mm}; \quad 60° \leqslant \delta \leqslant 80°;$$

$$10 \leqslant D \leqslant 1000 \text{ mm}; \ 0,1 \leqslant s \leqslant 10 \text{ mm/tour}; \ 30 \leqslant M \leqslant 300 \text{ kgm}.$$

En prenant le logarithme de l'équation (2.11), on obtient

$$\log M = \log C_c + \log t + \log \delta + \log D + \\ + 0,75 \log s - \log 150\,000. \qquad (2.12)$$

L'équation (2.12) met en jeu six variables et peut être représentée par une règle à deux curseurs. Adoptons l'ordre suivant des échelles: C_c, t, δ, D, s, M. En vertu de cet ordre mettons l'équation (2.12) sous la forme

$$\log C_c + \log t + \log \delta + \log D + 0,75 \log s + \\ + (-\log M - \log 150\,000) = 0.$$

Dessinons l'abaque et orientons les échelles (fig. 45). Vérifions le sens des échelles. La fonction $(-\log M - \log 150\,000)$ étant seule décroissante, il faudra inverser le sens de l'échelle M.

Posons $m = 250/3$ mm. Les échelles logarithmiques C_c, t, δ, D, M auront alors un même module et celui de l'échelle s sera égal à

$$m_s = \frac{250}{3} \cdot 0,75 = 62,5 \text{ mm}.$$

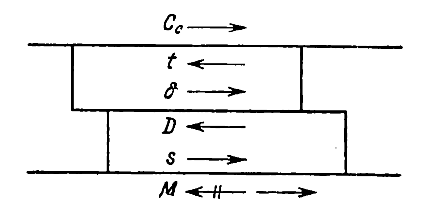


Fig. 45. Schéma d'une règle à deux curseurs pour la formule (2.11) avec indication des sens des échelles

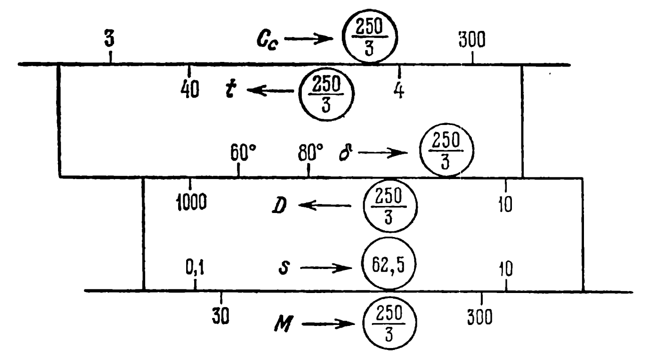


Fig. 46. Schéma d'une règle à deux curseurs pour la formule (2.11) avec indication des limites de variation des variables et des modules des échelles

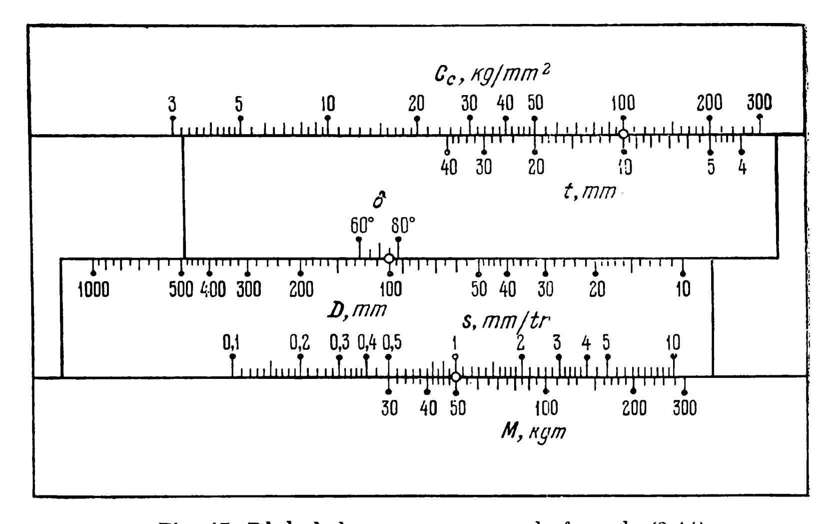


Fig. 47. Règle à deux curseurs pour la formule (2.11)

Pour construire l'abaque il faut donc disposer de deux canevas logarithmiques de modules 250/3 mm et 62,5 mm. Préparons-les. Dessinons une nouvelle fois l'abaque en y indiquant les limites données de variation des variables et les modules des échelles (fig. 46).

Traitons un exemple numérique. Soit $C_c = 100$ kg/mm², $t = 10$ mm, $\delta = 75°$, $D = 100$ mm, $s = 1$ mm/tour. La formule (2.11) donne

$$M = \frac{100 \cdot 10 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 1^{0,75}}{150\,000} = 50 \text{ kgm}.$$

La figure 47 représente un abaque construit pour des curseurs de 35 mm de largeur. La position des curseurs correspond à la solution de l'exemple numérique (on donne $C_c = 100$ kg/mm², $t = 10$ mm, $\delta = 75°$, $D = 100$ mm, $s = 1$ mm/tour; réponse $M = 50$ kgm).

Exemple 18. Construisons un abaque de l'équation

$$\frac{\alpha Q^2}{9,81} = \frac{(bh_{cr} + mh_{cr}^2)^3}{b + 2mh_{cr}} \tag{2.13}$$

qui définit la profondeur critique h_{cr} dans les canaux de profil trapézoïdal en fonction du débit Q, de la largeur b du lit du canal, du coefficient m d'écartement des berges et du coefficient de variation α de la distribution des vitesses sur la section α. La variable m prend les valeurs standard suivantes: 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,50; 1,75; 2; 2,5; 3. Les autres variables évoluent dans les limites suivantes

$$1 \leqslant Q \leqslant 50 \text{ m}^3/\text{s};\ 1 \leqslant b \leqslant 5 \text{ m};\ 1 \leqslant \alpha \leqslant 1,1;\ 0,3 \leqslant h_{cr} \leqslant 5 \text{ m}.$$

Transformons l'équation (2.13). Mettons la quantité bh_{cr} en facteur au numérateur et la quantité b au dénominateur, et multiplions les deux membres de l'équation par m^3/b^3. On obtient

$$\frac{\alpha Q^2 m^3}{9,81 b^3} = b^2 \left(\frac{mh_{cr}}{b}\right)^3 \frac{\left(1 + \frac{mh_{cr}}{b}\right)^3}{1 + 2\frac{mh_{cr}}{b}}. \tag{2.14}$$

Introduisons la variable auxiliaire u en posant

$$u = \frac{mh_{cr}}{b}. \tag{2.15}$$

L'équation (2.14) peut encore s'écrire

$$\frac{\alpha Q^2 m^3}{b^5} = 9,81 \frac{u^3 (1 + u)^3}{1 + 2u}. \tag{2.16}$$

Désignons pour abréger

$$t(u) = 9,81 \frac{u^3 (1 + u)^3}{1 + 2u}. \tag{2.17}$$

L'équation (2.16) s'écrit alors

$$\frac{\alpha Q^2 m^3}{b^5} = t(u). \tag{2.18}$$

Faisons varier u entre 0,1 et 2. L'équation (2.18) contient cinq variables. En prenant le logarithme de cette équation on obtient

$$2 \log Q + \log \alpha + 3 \log m - 5 \log b - \log t(u) = 0.$$

Cette équation peut être représentée par un abaque du type règle à calcul à deux curseurs.

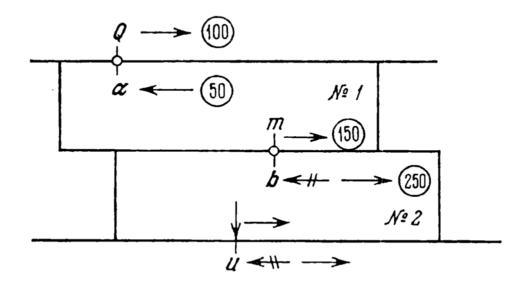


Fig. 48. Règle à deux curseurs pour l'équation (2.18) avec indication des sens des échelles et de leurs modules

L'abaque est tracé sur la figure 48. Si le module principal est pris égal à 50 mm, ceux des échelles logarithmiques Q, α, m, b seront respectivement: $m_Q = 100$ mm, $m_\alpha = 50$ mm, $m_m = 150$ mm et $m_b = 250$ mm.

Construisons le canevas de l'échelle u à l'aide de l'équation

$$x = 50 \log \frac{t(u)}{t(0,1)}, \tag{2.19}$$

dans laquelle

$$t(0,1) = 9,81 \frac{0,1^3 \cdot (1+0,1)^3}{1+2 \cdot 0,1}.$$

Le tableau 6 contient les valeurs des coordonnées qui servent à la construction du canevas de l'échelle u et qui ont été calculées à l'aide de l'équation (2.19).

Tableau 6

u	x	u	x	u	x
0,1	0	0,5	114,0	0,9	160,3
0,15	27,5	0,6	128,0	1	169,0
0,2	47,5	0,7	140,1	1,5	203,8
0,3	76,2	0,8	150,8	2	229,5
0,4	97,2				

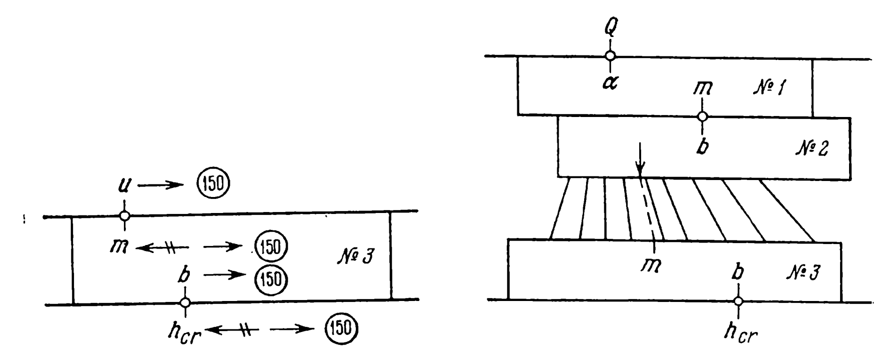


Fig. 49. Règle à un curseur pour l'équation (2.15) avec indication du sens des échelles et de leurs modules

Fig. 50. Schéma d'une règle à trois curseurs et une famille de lignes constantes pour l'équation (2.13)

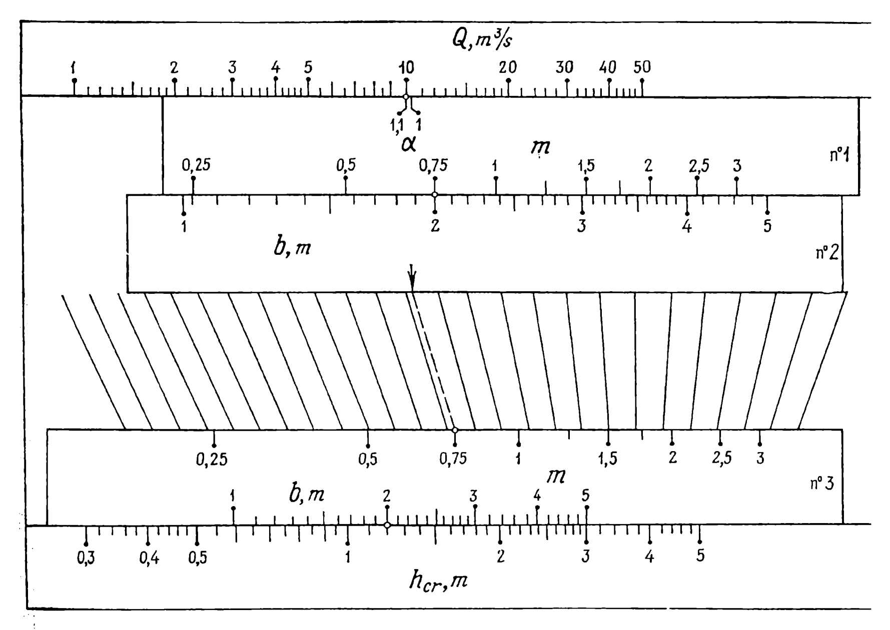


Fig. 51. Règle à trois curseurs pour l'équation (2.13)

En prenant le logarithme de l'équation (2.15) on obtient

$$\log u - \log m + \log b - \log h_{cr} = 0.$$

Cette équation peut être représentée par une règle à un curseur. L'abaque est celui de la figure 49. Toutes les échelles logarithmiques ont un même module. Prenons-le égal à 150 mm.

Dans les abaques des figures 48 et 49 on prendra le plan commun pour fond. Il contiendra l'échelle Q, deux échelles différentes u et l'échelle de résolution h_{cr}. En joignant les points de mêmes cotes des échelles u et en omettant ensuite les cotes u, on obtient l'abaque de la figure 50, qui se caractérise par la présence d'une famille de droites auxiliaires non cotées.

La figure 51 représente l'abaque construit d'après le schéma de la figure 50. La position des curseurs correspond à la solution de l'exemple numérique: $Q = 10$ m^3/s, $\alpha = 1{,}1$, $m = 0{,}75$, $b =$ $= 2$ m; réponse $h_{cr} = 1{,}20$ m.

On remarquera que la relation (2.1) peut être représentée également par une *règle à un curseur et à un viseur*. Sur le corps de la règle on disposera deux échelles et sur le curseur les autres. Pour lire la réponse il faudra déplacer plusieurs fois le curseur et le viseur. La méthode de construction de ces règles est analogue à celle qui vient d'être examinée. Elle fait l'objet des articles [54, 55].

CHAPITRE 3

GRAPHES DE FONCTIONS ET ÉCHELLES ACCOLÉES

§ 3.1. Notion de graphe de fonction

Pour représenter des relations entre deux variables on emploie les *graphes de fonctions* et les *échelles accolées*. Considérons tout d'abord les graphes de fonctions et certaines de leurs applications.

Soit donnée la relation entre deux variables

$$\beta = F(\alpha). \tag{3.1}$$

Pour représenter cette relation, prenons le champ binaire (α, β) donné par les équations

$$x = f(\alpha, \beta), \quad y = g(\alpha, \beta).$$

Supposons que ce champ binaire est de la forme indiquée sur la figure 52, i.e. chaque ligne α coupe chaque ligne β en un point et un seul. Pour construire le graphe de la fonction (3.1) dans ce champ, dressons le tableau 7 des valeurs de cette fonction:

Tableau 7

α	α_1	α_2	α_3	...	α_n
β	β_1	β_2	β_3	...	β_n

Repérons dans le champ (α, β) les points cotés α_1 et β_1, α_2 et β_2, ..., α_n et β_n et joignons-les par une ligne continue. Cette ligne sera le *graphe de la fonction* (3.1) *dans le champ binaire* (α, β). Le graphe de la fonction permet de déterminer d'après une valeur donnée α la valeur correspondante β. Pour cela on cherche le point d'intersection de la ligne α avec le graphe. La cote de la ligne β passant par ce point nous donnera la réponse. On résout de façon analogue le problème inverse, c'est-à-dire la détermination de α d'après β donné.

En particulier, pour champ binaire de représentation du graphe de la fonction (3.1) on peut prendre un *réseau cartésien* défini par les équations

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

On obtient alors le *graphe* ordinaire *d'une fonction dans un réseau cartésien* (fig. 53).

Quelquefois on peut tirer parti du choix arbitraire du réseau fonctionnel (α, β) et réduire le graphe de la fonction à une allure simple pour en alléger la construction.

Tous les graphes des fonctions de la forme

$$\beta = A\alpha^B, \tag{3.2}$$

où A et B sont des constantes arbitraires, tracées dans le réseau logarithmique défini par les équations

$$x = m \log \alpha, \quad y = n \log \beta, \tag{3.3}$$

seront des droites. Dans les équations (3.3), m et n sont des constantes. Comme la droite est définie par deux points, pour construire

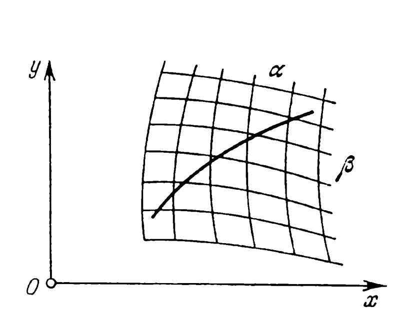


Fig. 52. Graphe de la fonction $\beta = F(\alpha)$ dans le champ binaire (α, β) d'équations $x = f(\alpha, \beta)$ et $y = g(\alpha, \beta)$

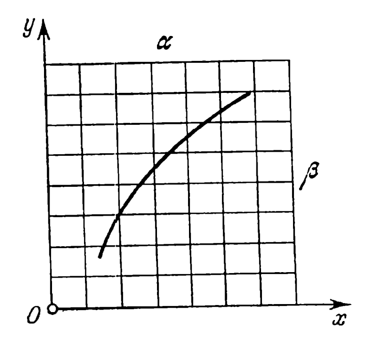


Fig. 53. Graphe de la fonction $\beta = F(\alpha)$ dans le réseau cartésien (α, β) d'équations $x = \alpha$ et $y = \beta$

le graphe rectiligne de la relation (3.2), il suffit de connaître deux couples de valeurs α et β satisfaisant l'équation (3.2).

Montrons que les graphes de la relation (3.2) sont des droites dans un réseau logarithmique. Prenons le logarithme des deux membres de l'équation (3.2). Il vient

$$\log \beta = \log A + B \log \alpha.$$

Portant dans cette équation les expressions de $\log \alpha$ et $\log \beta$ tirées des équations (3.3), on obtient l'équation de la droite

$$y = B\frac{n}{m}x + n \log A. \tag{3.4}$$

Exemple 19. Construisons sur du papier logarithmique le graphe de la fonction

$$\beta = 1{,}4\alpha^{2{,}142}$$

dans l'intervalle $1 \leqslant \alpha \leqslant 7$.

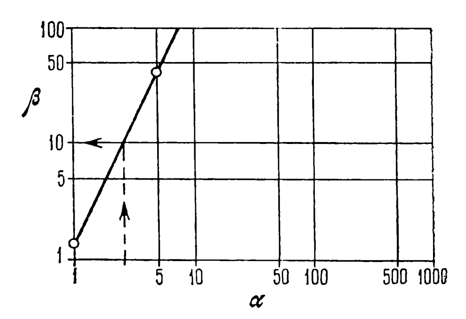


Fig. 54. Construction du graphe de la relation $\beta = 1,4\ \alpha^{2,142}$ sur du papier logarithmique

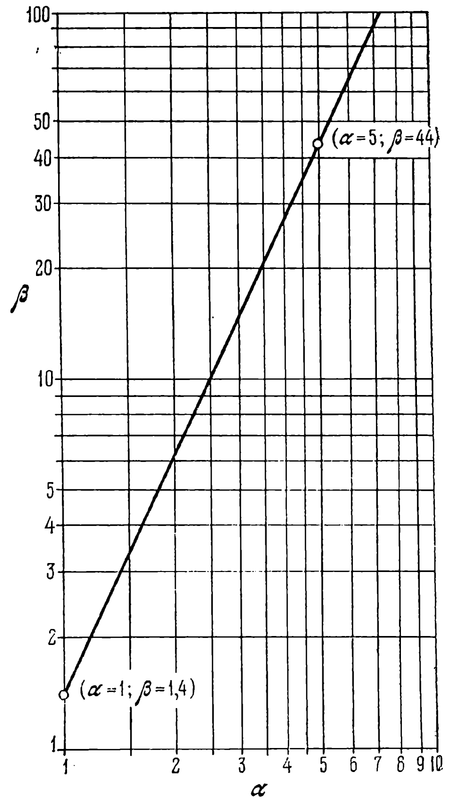


Fig. 55. Partie utile du réseau logarithmique (α, β) et graphe de la fonction $\beta = 1,4\ \alpha^{2,142}$

A l'intervalle [1, 7] de variation de α correspond l'intervalle [1, 90] de variation de β. Prenons pour droites β les droites parallèles à la longueur du réseau logarithmique de la figure 54 et pour droites α les droites parallèles à la largeur.

Conservons la graduation du réseau. β variera donc entre 1 et 100 et α entre 1 et 1000. Ces intervalles couvrent les limites données de variation de α et β. Calculons deux exemples numériques. Posant $\alpha = 1$, on trouve $\beta = 1{,}4$. En faisant $\alpha = 5$, on obtient $\beta \approx 44$. Marquons sur le réseau (α, β) les points cotés $\alpha = 1$ et $\beta = 1{,}4$, $\alpha = 5$ et $\beta = 44$ et joignons-les par une droite. La figure 55 représente la partie utile du réseau (α, β) avec le graphe. Supposons $\alpha = 2{,}5$. Il lui correspond la valeur $\beta = 10$ sur le graphe.

§ 3.2. Choix des paramètres dans les formules empiriques du type produit de puissances

La méthode du choix des paramètres A et B dans les formules empiriques du type produit de puissances est basée sur la rectification du graphe de fonctions (3.2) dans un réseau logarithmique.

Supposons que la relation (3.1) est donnée par le tableau 7 dressé empiriquement. On demande de choisir les paramètres A et B de la formule (3.2) de telle sorte que ce tableau corresponde le mieux à cette formule.

Repérons sur le réseau logarithmique défini par les équations (3.3) les points (α_1, β_1), (α_2, β_2), . . ., (α_n, β_n) et traçons (à vue) la droite qui passe le plus près de ces points. L'équation de cette droite peut s'écrire

$$y = ax + b.$$

En comparant cette équation avec l'équation (3.4), on obtient

$$a = B\frac{n}{m} \quad \text{et} \quad b = n \log A,$$

d'où

$$A = 10^{b/n}, \quad B = \frac{am}{n}.$$

Pour déterminer les coefficients a et b il faut rapporter le réseau logarithmique à des axes de coordonnées xOy en tenant compte du fait que l'origine doit coïncider avec le point correspondant à $\alpha = \beta = 1$.

En effet, pour $\alpha = \beta = 1$, il vient

$$x = m \log \alpha = m \log 1 = 0,$$

$$y = n \log \beta = n \log 1 = 0.$$

La figure 56 représente le schéma d'alignement de données empiriques dans un réseau logarithmique (α, β), dont les deux axes

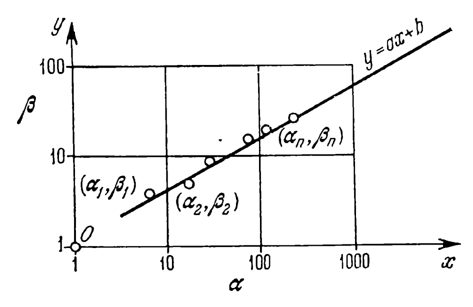


Fig. 56. Schéma d'alignement des données empiriques dans un réseau logarithmique (α, β) dont les deux axes ont même module

ont le même module m. Dans ce cas les formules de A et B se simplifient

$$A = 10^{b/m}, \quad B = a.$$

On peut utiliser un procédé analogue pour déterminer les paramètres des formules empiriques

$$\beta = A\alpha_1^{B_1}\alpha_2^{B_2}\alpha_3^{B_3} \ldots \alpha_n^{B_n},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, β sont des variables et $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ des constantes.

§ 3.3. Exemple de choix des paramètres dans des formules empiriques du type produit de puissances

La vitesse de coupe v s'exprime en fonction de la profondeur de coupe t et de l'avancée s en un tour de broche à l'aide de la formule du type produit de puissances

$$v = At^B s^C, \tag{3.5}$$

où A, B et C sont des constantes.

Dans les tableaux 8 et 9 figurent les valeurs des vitesses obtenues empiriquement respectivement à profondeur de coupe fixe ($t = 5$ mm) et à avancée fixe ($s = 0,6$ mm/tour).

Tableau 8

$t = 5$ mm

s, mm/tour	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1	1,2
v, m/s	48,6	40,5	34,8	31,0	27,9	25,6	22,0	19,6

Tableau 9

$s = 0,6$ mm/tour

t, mm	3	4	5	6	8
v, m/s	35,4	32,9	31,0	29,6	27,4

Calculons les constantes A, B et C de la formule (3.5) en utilisant les données des tableaux.

Pour t = const, la formule (3.5) s'écrit

$$v = A_1 s^C,$$

où A_1 est un coefficient numérique. Dans un réseau logarithmique,

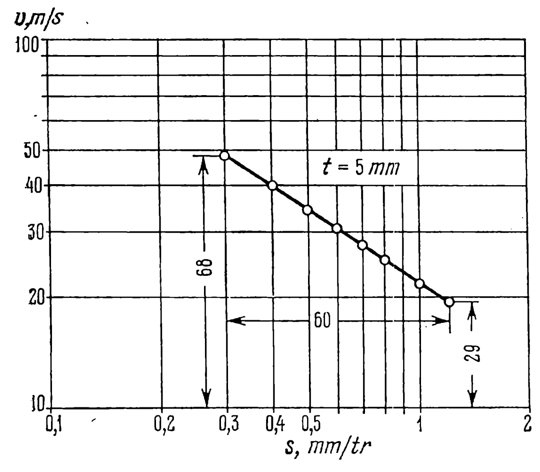


Fig. 57. Alignement des données empiriques du tableau 8 dans le réseau logarithmique (v, s) obtenu par une chiffraison respective du papier logarithmique

dont les deux axes ont même module, elle est représentée par une droite dont la pente définit le paramètre C.

Pour s = const, la formule (3.5) s'écrit sous la forme analogue

$$= A_2 t^B,$$

où A_2 est un coefficient numérique.

Prenons du papier logarithmique (fig. 57). Inscrivons les cotes $v = 10; 20; \ldots; 100$ m/s aux pieds des horizontales et les cotes $s = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 1; 2$ mm/tour aux pieds des verticales.

Utilisons le tableau 8 pour porter sur la figure 57 les points v et s. Ils sont presque tous situés sur une même droite. Traçons cette dernière.

L'origine des coordonnées se trouve en dehors du schéma au point du réseau coté $v = 1$ m/s et $s = 1$ mm/tour. Déterminons la pente de cette droite à l'aide de la formule

$$C = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{x_2 - x_1},$$

où $\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$ sont les ordonnées des extrémités d'un segment de cette droite, comptées à partir de la droite inférieure du réseau

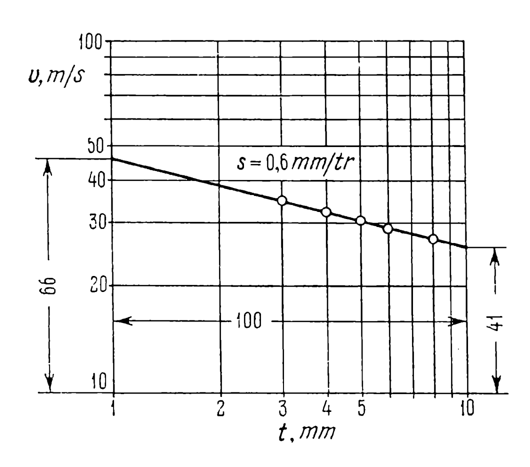


Fig. 58. Alignement des données empiriques du tableau 9 dans le réseau logarithmique (v, t) obtenu par une chiffraison respective du papier logarithmique

$v = 10$ m/s, x_1 et x_2 les abscisses de ces mêmes points. Mesurons sur la figure 57 les segments $\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$ et $x_2 - x_1$. On obtient $\bar{y}_1 = 68$ mm, $\bar{y}_2 = 29$ mm, $x_2 - x_1 = 60$ mm. Il vient

$$C = \frac{29 - 68}{60} = -0,65.$$

Traçons maintenant le réseau (v, t) sur du papier logarithmique (fig. 58). Marquons les cotes $v = 10, 20, \ldots, 100$ m/s aux pieds des horizontales et les cotes $t = 1, 2, 3, \ldots, 10$ mm aux pieds des verticales. Portons les points v et t sur ce réseau à l'aide du tableau 9. Ils sont presque tous situés sur une même droite. Traçons-la jusqu'à son intersection avec les verticales $t = 1$ mm et $t = 10$ mm. Mesurons sur la figure 58 les segments $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ et $x_2 - x_1$.

On obtient $\bar{y}_1 = 66$ mm, $\bar{y}_2 = 41$ mm, $x_2 - x_1 = 100$ mm. D'où

$$B = \frac{41-66}{100} = -0{,}25.$$

La formule (3.5) s'écrit maintenant

$$v = At^{-0{,}25}\, s^{-0{,}65}.$$

Déterminons le coefficient A en résolvant un exemple numérique. En vertu des tableaux 8 et 9, pour $t = 5$ mm et $s = 0{,}6$ mm/tour, on obtient $v = 31$ m/s. Pour déterminer le coefficient A, on obtient donc l'équation

$$31 = A \cdot 5^{-0{,}25} \cdot 0{,}6^{-0{,}65},$$

d'où l'on déduit $A \approx 33{,}3$. La formule (3.5) s'écrit

$$v = \frac{33{,}3}{t^{0{,}25} \cdot s^{0{,}65}}.$$

§ 3.4. Droite représentative d'une fonction dans un champ binaire et son lien avec des abaques à points alignés

Supposons que le graphe de la relation

$$F(\alpha, \beta, A, B) = 0, \tag{3.6}$$

où A et B sont des paramètres, est rectifiable dans le réseau fonctionnel (α, β) défini par les équations

$$x = f_{12}(\alpha, \beta), \quad y = g_{12}(\alpha, \beta), \tag{3.7}$$

quels que soient les paramètres A et B. Trouvons la forme des relations (3.6) qui autorise une telle rectification.

Mettons l'équation de la droite sous la forme

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1. \tag{3.8}$$

Dans cette écriture les paramètres A et B ont un sens géométrique évident. Ils représentent la longueur des segments découpés par la droite (3.8) sur les axes de coordonnées (pour $y = 0$ on a $x = A$, pour $x = 0$ on a $y = B$). Compte tenu de (3.7), l'équation (3.8) s'écrit

$$\frac{f_{12}}{A} + \frac{g_{12}}{B} = 1. \tag{3.9}$$

On considérera la relation (3.9) comme une équation à quatre variables : α, β, A et B. Construisons dans le système de coordonnées xOy le champ binaire (α, β) correspondant aux équations (3.7). Par ailleurs traçons sur les axes de coordonnées les échelles A et B correspondant aux équations

échelle A :

$$x = A, \quad y = 0;$$

échelle B :

$$x = 0, \quad y = B.$$

On obtient la figure 59 qui nous permet de tracer rapidement toute droite représentative de la relation (3.9). Pour cela il faut simplement repérer sur les échelles A et B les points de cotes données et les joindre par une droite. Cette droite sera le graphe cherché.

La construction nomographique obtenue est constituée des échelles A et B et du champ binaire (α, β) liés par un alignement et est un cas particulier d'*abaque à points alignés*. La courbe représentative de la fonction y joue le rôle de *droite résolvante*.

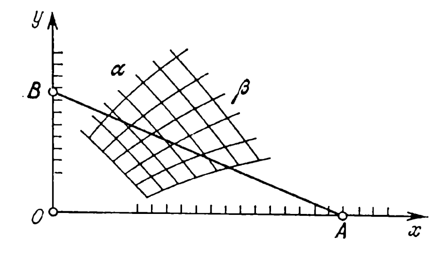


Fig. 59. Abaque à points alignés pour l'équation $\frac{f_{12}}{A}+\frac{g_{12}}{B}=1$

Introduisons dans l'équation (3.9) des paramètres de transformation m et n. A cet effet mettons l'équation (3.9) sous la forme

$$\frac{mf_{12}}{mA}+\frac{ng_{12}}{nB}=1$$

ou

$$\frac{\bar{f}_{12}}{\bar{A}}+\frac{\bar{g}_{12}}{\bar{B}}=1,$$

où

$$\bar{f}_{12}=mf_{12}, \qquad \bar{g}_{12}=ng_{12}, \qquad \bar{A}=mA, \qquad \bar{B}=nB.$$

Les équations des éléments de l'abaque contenant les paramètres de transformation m et n, s'écriront

échelle A :

$$x = mA, \quad y = 0;$$

échelle B :

$$x = 0, \quad y = nB;$$

champ (α, β) :

$$x = mf_{12}, \quad y = ng_{12}.$$

Considérons maintenant la généralisation suivante. Supposons que l'on ait à résoudre le système d'équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{f_{12}(\alpha_1, \alpha_2)}{A}+\frac{g_{12}(\alpha_1, \alpha_2)}{B}&=1,\\ \frac{f_{34}(\alpha_3, \alpha_4)}{A}+\frac{g_{34}(\alpha_3, \alpha_4)}{B}&=1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ \frac{f_{(n-1)n}(\alpha_{n-1}, \alpha_n)}{A}+\frac{g_{(n-1)n}(\alpha_{n-1}, \alpha_n)}{B}&=1.\end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

Chacune des équations du système (3.10) est susceptible d'être représentée par un abaque du type de la figure 59, tel que les échelles

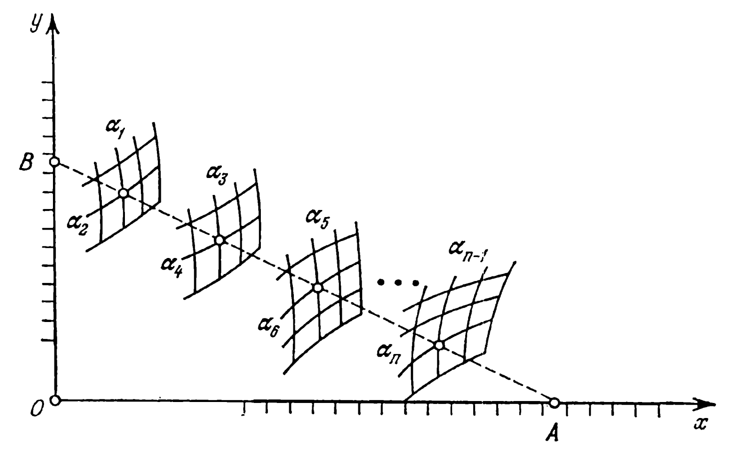


Fig. 60. Schéma d'un abaque à points alignés pour le système d'équations (3.10)

A et B soient partout identiques. En assemblant tous les abaques on obtient celui du système d'équations (3.10), qui est représenté sur la figure 60.

Eliminons les variables A et B entre les équations du système (3.10). Pour cela retranchons la première équation des suivantes et résolvons les équations obtenues par rapport à A/B. On obtient le système

$$\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}=\frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}=\ \ldots\ =\frac{f_{n-1,\,n}-f_{12}}{g_{n-1,\,n}-g_{12}}, \quad (3.11)$$

dont l'abaque se déduit de la figure 60 par extraction de l'échelle des variables A et B éliminées. Donc, l'abaque du système d'équa-

tions (3.11) est constitué d'une série de champs binaires liés par un seul alignement. C'est l'*abaque à points alignés le plus général.*

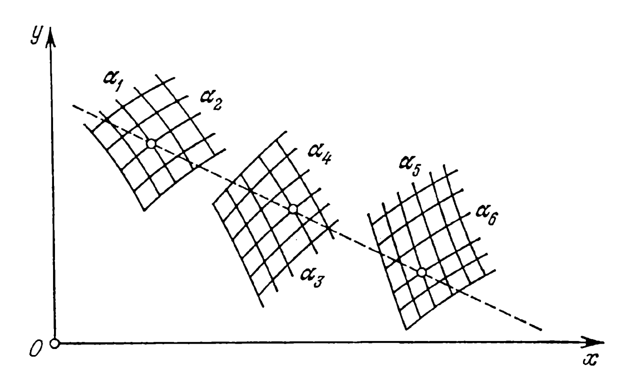


Fig. 61. Schéma d'un abaque à points alignés pour l'équation $\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}=\frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}$.

Lorsque les champs binaires sont au nombre de trois, le schéma de l'abaque est celui de la figure 61. Il représente l'équation

$$\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}=\frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}.$$

§ 3.5. Emploi des graphes rectilignes de fonctions dans un champ binaire pour la résolution de systèmes d'équations

Soit à résoudre le système de deux équations

$$\frac{f_{34}(A, B)-f_{12}(\alpha, \beta)}{g_{34}(A, B)-g_{12}(\alpha, \beta)}=\frac{f_{56}(C, D)-f_{12}(\alpha, \beta)}{g_{56}(C, D)-g_{12}(\alpha, \beta)} \qquad (3.12)$$

et

$$\beta = F(\alpha), \qquad (3.13)$$

où α et β sont des variables inconnues, A, B, C et D, des paramètres variables.

Représentons l'équation (3.12) par un abaque à points alignés à trois champs binaires (α, β), (A, B) et (C, D). Puis de même que dans un réseau fonctionnel, construisons dans le champ binaire (α, β) le graphe de la relation (3.13). On obtient l'abaque de la figure 62.

Le mode d'emploi de l'abaque est le suivant. Repérons dans les champs binaires (A, B) et (C, D) les points de cotes données et

relions-les par une droite, graphe de l'équation (3.12). Celle-ci coupe le graphe de l'équation (3.13) en un certain point. Les cotes

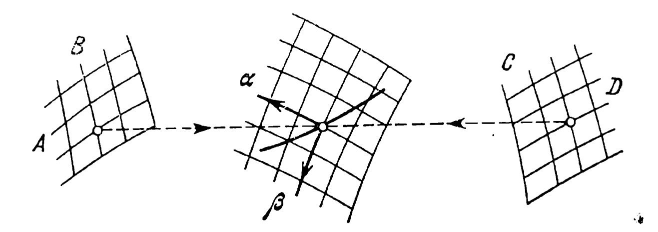


Fig. 62. Schéma d'un abaque à points alignés pour le système d'équations (3.12) et (3.13)

des droites α et β passant par ce point donnent les valeurs cherchées de α et β.

Exemple 20. Lorsqu'on calcule le travail d'une pompe et d'une conduite d'eau [33], on a à résoudre le système d'équations

$$H = H_g + sq^2 \tag{3.14}$$

et

$$H = F(q), \tag{3.15}$$

où H est la pression totale exprimée en m; H_g la hauteur géométrique de remontée de l'eau en m; q le débit en m^3/s; s un paramètre caractérisant les résistances hydrauliques dans la conduite d'eau, exprimé en s^2/m^5.

La fonction (3.15) est donnée graphiquement ou tabulairement. Prenons par exemple une pompe de marque 18НДс de paramètres $n = 730$ tours/mn et $D = 700$ mm, où n est le nombre de tours, D le diamètre de la roue réceptrice. Pour cette pompe la relation (3.15) est exprimée par le tableau 10.

Tableau 10

H, m	40	35	30	25
q, m^3/s	0,36	0,53	0,62	0,70

Mettons la formule (3.14) sous la forme

$$\frac{H}{H_g} + \frac{q^2}{\left(-\frac{H_g}{s}\right)} = 1.$$

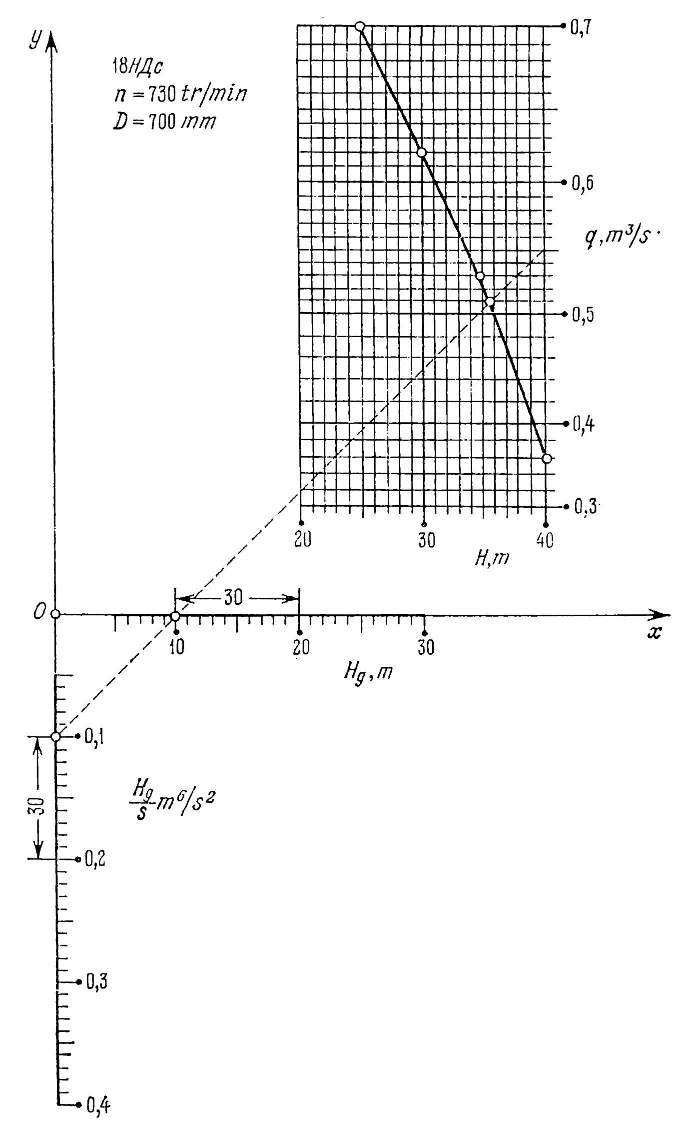


Fig. 63. Abaque à points alignés pour la détermination de H et q à partir de l'équation $H = H_g + sq^2$ et de l'équation $H = F(q)$, donnée par le tableau 10

En la comparant avec la formule (3.9), on obtient

$$f_{12}=H, \quad g_{12}=q^2, \quad A=H_g, \quad B=-\frac{H_g}{s}.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

échelle H_g:

$$x = mH_g, \quad y = 0;$$

échelle $\frac{H_g}{s}$:

$$x=0, \quad y=-n\frac{H_g}{s};$$

champ (H, q):

$$x = mH, \quad y = nq^2.$$

Convenons des intervalles de variation suivants:

$$5 \leqslant H_g \leqslant 30 \text{ m}; \quad 0{,}05 \leqslant \frac{H_g}{s} \leqslant 0{,}4 \text{ m}^6/\text{s}^2;$$

$$20 \leqslant H \leqslant 40 \text{ m}; \quad 0{,}3 \leqslant q \leqslant 0{,}7 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Posons $m = 3$ mm et $n = 300$ mm. L'abaque est représenté sur la figure 63. Il résout l'exemple numérique: $H_g = 10$ m, $H_g/s = 0{,}1$ m^6/s^2; réponse $q = 0{,}51$ m^3/s, $H = 35{,}5$ m.

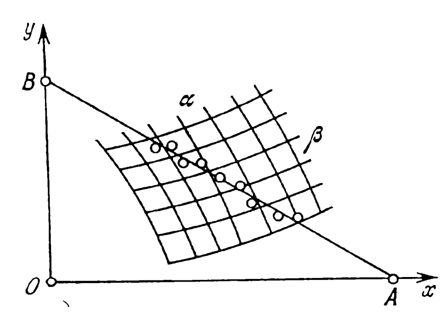


Fig. 64. Alignement des données empiriques dans le champ binaire (α, β) de l'abaque de l'équation $\frac{f_{12}}{A}+\frac{g_{12}}{B}=1$

§ 3.6. Emploi des graphes rectilignes de fonctions dans un champ binaire pour le choix des paramètres des formules empiriques

Généralisons la méthode de détermination des paramètres des formules du type produit de puissances, développée précédemment. Supposons qu'on ait à déterminer les paramètres A et B d'une formule empirique (3.9) d'après le tableau 7. Pour résoudre ce problème, portons les points empiriques sur le champ binaire (α, β) de l'abaque de la figure 59. Supposons que ces points sont approximativement situés sur une même droite (cf. fig. 64). Les valeurs cherchées des paramètres A et B de la relation (3.9) seront les points d'intersection de cette droite avec les échelles A et B.

Pour utiliser cette méthode dans la pratique, il faut posséder un jeu d'abaques du type de la figure 59, correspondant à diverses

fonctions f_{12} et g_{12}. Ces abaques figurent par exemple dans les travaux [52, 56].

Exemple 21. Construisons un abaque pour la détermination des paramètres A et B de la formule (3.2) d'après des données empiriques.

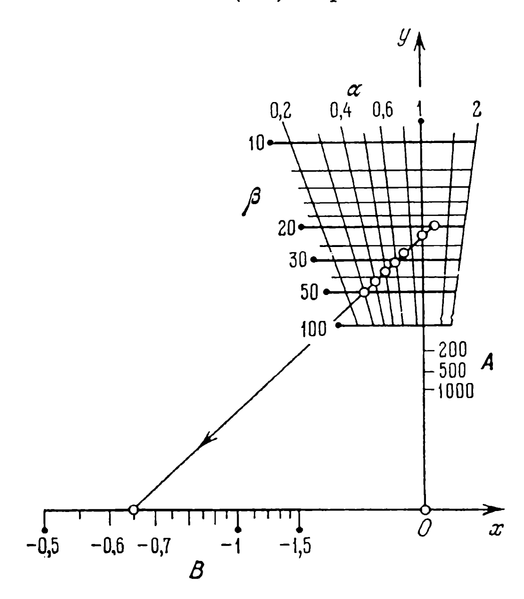


Fig. 65. Alignement des données empiriques du tableau 8 dans le champ binaire (α, β) de l'abaque à points alignés pour la formule $\beta = A\alpha^B$

Prenons les logarithmes des deux membres de l'équation (3.2):

$$\log \beta = \log A + B \log \alpha.$$

L'équation obtenue se ramène à la forme (3.9)

$$\frac{\log \alpha/\log \beta}{1/B} + \frac{1/\log \beta}{1/\log A} = 1.$$

Ecrivons les équations des éléments de l'abaque renfermant les paramètres de transformation m et n sous la forme:

échelle B:

$$x = \frac{m}{B}, \quad y = 0;$$

échelle A:

$$x = 0, \qquad y = \frac{n}{\log A};$$

champ (α, β):

$$x = \frac{m \log \alpha}{\log \beta}, \quad y = \frac{n}{\log \beta}.$$

La figure 65 représente l'abaque correspondant à ces équations pour $m = 50$ mm et $n = 100$ mm dans les intervalles $0,2 \leqslant \alpha \leqslant 2$; $10 \leqslant \beta \leqslant 100$; $-1,5 \leqslant B \leqslant -0,5$; $10 \leqslant A \leqslant 1000$. La droite $\alpha = 1$ est confondue avec l'axe Oy. Elle est coupée par les droites β suivant une échelle qui est confondue avec l'échelle A.

Utilisons cet abaque pour calculer les paramètres A et B d'après les données empiriques du tableau 8. Prenons $s = \alpha$ et $v = \beta$. Repérons les points empiriques dans le champ (α, β). Ces points sont approximativement situés sur une même droite. Traçons-la. A son intersection avec les axes de coordonnées, on lit $A = 23$ et $B = -0,65$. Donc la formule empirique correspondant au tableau 8 est

$$v = 23\, s^{-0,65}.$$

§ 3.7. Emploi des graphes rectilignes de fonctions dans un champ binaire pour une approximation de Tchébychev de fonctions

Supposons que le graphe de la relation

$$\beta = F(\alpha), \tag{3.16}$$

construit dans le champ binaire (α, β), d'équations

$$x = f_{12}(\alpha, \beta), \quad y = g_{12}(\alpha, \beta),$$

est une courbe convexe (fig. 66).

Désignons par $\Delta\beta$ l'erreur absolue sur β et par $\Delta_0 > 0$ une erreur absolue admissible sur β. Traçons dans le champ binaire (α, β) les graphes des relations par excès et par défaut de Δ_0, i.e. les graphes des relations

$$\beta_1 = F(\alpha) + \Delta_0, \tag{3.17}$$

$$\beta_2 = F(\alpha) - \Delta_0. \tag{3.18}$$

Supposons pour fixer les idées que le graphe de la relation (3.16) a sa convexité tournée vers le haut et que les graphes des relations (3.17) et (3.18) sont situés respectivement au-dessus et au-dessous du graphe de la relation (3.16). Ces derniers sont représentés en pointillé sur la figure 66.

Les graphes des relations (3.17), (3.16) et (3.18) sont respectivement les lieux géométriques des points tels que l'erreur $\Delta\beta$ (la différence entre les valeurs exacte et approchée de β) soit respectivement égale à Δ_0, 0 et $-\Delta_0$. On peut donc les appeler *lignes d'égales erreurs* et les affecter des cotes Δ_0, 0, $-\Delta_0$.

Les lignes Δ_0 et $-\Delta_0$ délimitent dans le champ (α, β) une bande en tout point de laquelle

$$-\Delta_0 \leqslant \Delta\beta \leqslant \Delta_0.$$

Si, dans cette bande, on trace une ligne quelconque, elle représentera le graphe d'une certaine relation approximant la fonction (3.16)

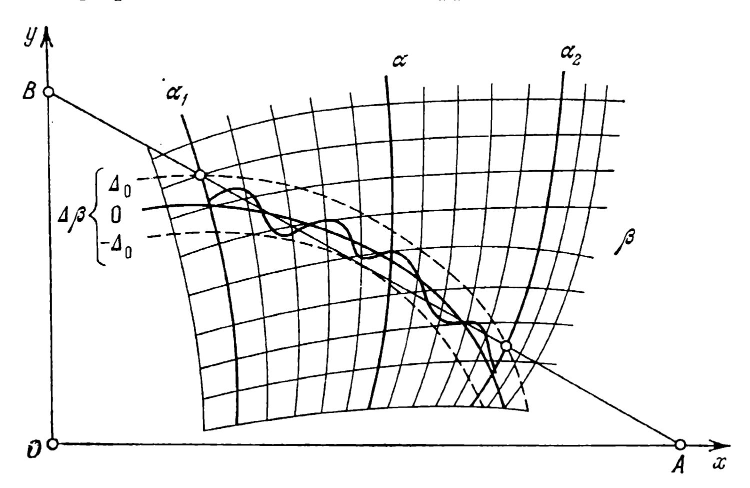


Fig. 66. Schéma de résolution du problème direct de l'approximation de Tchébychev

avec une erreur non supérieure en valeur absolue à l'erreur absolue admissible Δ_0.

Soit à approximer la relation (3.16) par une relation (3.9) de telle sorte que dans l'intervalle $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ soit réalisée la condition

$$-\Delta_0 \leqslant \Delta\beta \leqslant \Delta_0.$$

Considérons le problème direct et le problème inverse.

Problème direct. On donne Δ_0 et α_1 et on demande α_2, A et B.

Par le point d'intersection des lignes α_1 et Δ_0 (cf. fig. 66) traçons la tangente à la ligne $-\Delta_0$ et à son point d'intersection avec la ligne Δ_0 lisons la réponse α_2. Les valeurs cherchées de A et B sont les cotes des points d'intersection de cette tangente avec les axes de coordonnées.

Comparant le graphe tracé et le graphe donné, on s'aperçoit que dans l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ la quantité $|\Delta\beta|$ passe trois fois par son maximum Δ_0 (aux extrémités et au point de tangence) et s'annule deux fois. Cette approximation est dite de Tchébychev.

Problème inverse. On donne α_1 et α_2 et on demande Δ_0, A et B.

Ici il est nécessaire de tracer la famille de lignes $\Delta\beta$ dans le champ (α, β) pour des valeurs positives et négatives équidistantes, à l'aide des équations paramétriques

$$x = f_{12}\,[\alpha, F(\alpha) + \Delta\beta], \quad y = g_{12}\,[\alpha, F(\alpha) + \Delta\beta].$$

Le problème se résout par tâtonnement (cf. fig. 67). Donnons-nous une valeur de $\Delta\beta = \Delta_1 > 0$. Traçons une droite passant par les

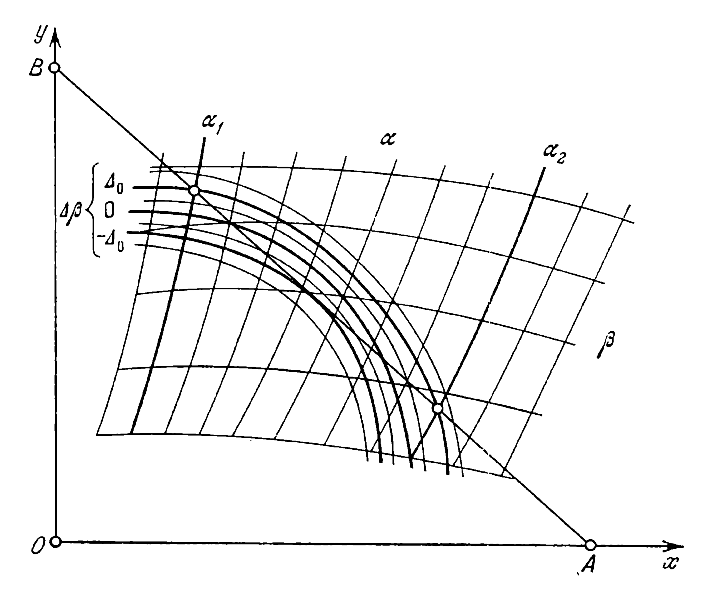


Fig. 67. Schéma de résolution du problème inverse de l'approximation de Tchébychev

points d'intersection de la ligne Δ_1 avec les lignes α_1 et α_2. Lisons la cote de la ligne $\Delta\beta$ tangente à cette droite. Si cette cote est égale à $-\Delta_1$, le problème est résolu et $\Delta_0 = \Delta_1$. Dans le cas contraire on fait varier Δ_1 jusqu'à ce que la cote de la ligne $\Delta\beta$ soit égale à $-\Delta_1$ au point de tangence. On aura de nouveau $\Delta_0 = \Delta_1$. Les valeurs A et B sont de nouveau données par les cotes des points d'intersection de la tangente avec les axes de coordonnées.

On résout de façon analogue les problèmes consistant à déterminer les approximations de Tchébychev lorsque l'approximation est évaluée à l'aide de l'erreur relative

$$\delta\beta = 100\,\frac{\Delta\beta}{\beta}\,\%.$$

Ainsi pour résoudre le problème direct, on construit dans le champ (α, β) les graphes des relations

$$\beta_1 = \left(1 + \frac{\delta_0}{100}\right) F(\alpha), \quad \beta_2 = \left(1 - \frac{\delta_0}{100}\right) F(\alpha),$$

où $\delta_0 > 0$ est l'erreur relative admissible. Ces graphes délimitent sur le champ (α, β) une bande en tous les points de laquelle est réalisée la condition

$$-\delta_0 \leqslant \delta\beta \leqslant \delta_0.$$

La résolution du problème s'achève comme dans le cas précédent.

Il y a un grand intérêt pratique à étudier le *cas général d'un champ binaire rectiligne* (α, β) et surtout son cas particulier où deux familles de courbes forment un réseau orthogonal dans lequel la famille de lignes β est régulière ou logarithmique.

Supposons que le champ binaire (α, β) est défini par les équations

$$x = f(\alpha), \quad y = \beta.$$

Dans un tel champ, les lignes d'égales erreurs absolues se déduiront du graphe de la relation (3.16) par une translation verticale d'une grandeur constante $\Delta y = \Delta\beta$, puisque $y = \beta$. Dans ce cas le problème de la détermination de A, B et Δ_0 d'après les valeurs données α_1 et α_2 se résout sans tâtonnement. Traçons dans le champ binaire (α, β) le graphe de la relation (3.16) sur l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ (cf. fig. 68). Traçons une corde par les extrémités du graphe, une tangente parallèle à cette corde et, enfin, une droite équidistante de la corde et de la tangente. Les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec les axes Ox et Oy donnent les valeurs des paramètres A et B. La quantité Δ_0 sera égale à la moitié du segment vertical intercepté par la tangente et la corde. Si la courbe est convexe vers le haut, on peut la construire comme sur la figure 68. En effet, dans ce cas l'erreur aux extrémités du graphe est égale à Δ_0 et au point de tangence à $-\Delta_0$.

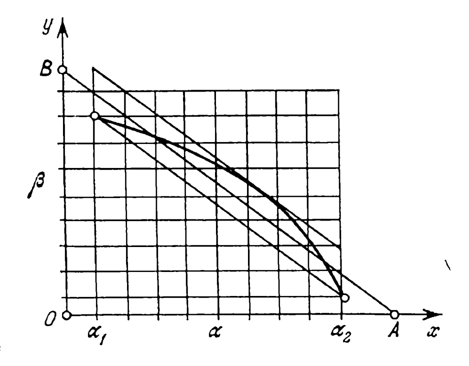


Fig. 68. Schéma de résolution du problème inverse de l'approximation de Tchébychev pour le cas où le champ binaire (α, β) est donné par les équations $x = f(\alpha)$ et $y = \beta$

Si le champ binaire est défini par les équations

$$x = f(\alpha), \quad y = \log \beta$$

une construction analogue permettrait de résoudre le problème d'approximation de la fonction (3.16) dans les limites données de variation de α par la relation

$$\frac{f(\alpha)}{A}+\frac{\log\beta}{B}=1$$

avec une erreur relative minimale.

Cette méthode permet entre autres d'approximer facilement la fonction (3.16) par une fonction puissance

$$\beta = a\alpha^{b} \tag{3.19}$$

avec une erreur relative minimale dans les limites données de variation de α. A cet effet construisons sur un réseau logarithmique le graphe de la relation (3.16) et remplaçons-le par une droite à l'aide de la méthode indiquée. On peut par exemple approximer la fonction logarithmique $\beta = \log\alpha$ par la fonction (3.19) en recourant toujours à cette méthode.

La méthode indiquée d'approximation de fonctions d'une variable (3.16) se généralise aux fonctions à deux et trois variables

$$\beta = F(\alpha, a), \tag{3.20}$$

$$\beta = F(\alpha, a, b). \tag{3.21}$$

Les fonctions (3.20) et (3.21) sont approchées sur l'intervalle de variation des variables avec des erreurs absolues ou relatives minimales par des relations de la forme

$$\frac{f_{12}(\alpha,\beta)}{A(a)}+\frac{g_{12}(\alpha,\beta)}{B(a)}=1, \tag{3.22}$$

$$\frac{f_{12}(\alpha,\beta)}{A(a,b)}+\frac{g_{12}(\alpha,\beta)}{B(a,b)}=1, \tag{3.23}$$

dans lesquelles f_{12} et g_{12} sont des fonctions données, A et B des fonctions inconnues. En appliquant la méthode précédente au problème inverse pour un jeu donné de valeurs de la variable a ou des variables a et b, on obtient un tableau des valeurs des fonctions A et B et des erreurs d'approximation.

Les relations d'approximation (3.22) et (3.23) sont intéressantes en ce sens qu'elles permettent, contrairement aux relations initiales (3.20) et (3.21), de construire des *abaques à points alignés* [57] pour certaines formes particulières des fonctions f_{12} et g_{12}. Par ailleurs la forme (3.23) autorise le tracé d'*abaques à transparent orienté* (cf. § 13.6). La relation initiale (3.21) ne jouit pas d'une façon générale de cette propriété.

§ 3.8. Transformation du graphe d'une fonction dans une échelle accolée

Considérons le graphe d'une fonction (3.1) tracé dans un réseau fonctionnel (α, β) quelconque (fig. 69). Les lignes α et β coupent le graphe respectivement suivant les échelles α et β. On peut tracer

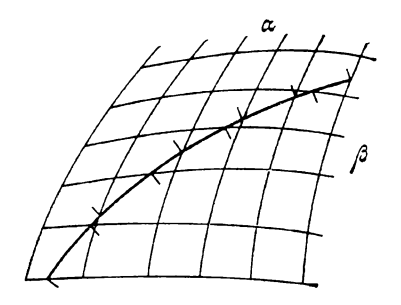


Fig. 69. Déduction d'une échelle accolée à partir du graphe d'une fonction dans le champ binaire (α, β)

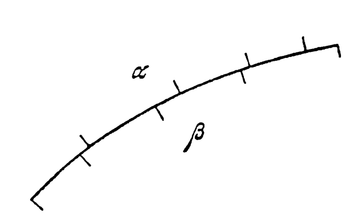


Fig. 70. Schéma de l'échelle accolée α et β déduite de la figure 69

ces échelles des deux côtés du graphe et retirer le réseau (α, β). On obtient ainsi l'échelle accolée α et β de la figure 70. Chaque point de cette échelle possède deux cotes α et β. La connaissance de l'une permet de déterminer l'autre.

Exemple 22. Transformer dans une échelle accolée le graphe de la fonction

$$\beta = 1{,}4\alpha^{2{,}142}$$

tracé dans un réseau logarithmique (cf. fig. 55).

Les droites horizontales β coupent le graphe (cf. fig. 55) suivant une échelle logarithmique. Traçons-la. Les droites α coupent également le graphe suivant une échelle logarithmique α. Construisons-la. On obtient l'échelle accolée constituée de deux échelles logarithmiques de modules différents de la figure 71.

Montrons maintenant comment se transforme dans une échelle accolée le graphe de la fonction (cf. fig. 72) construit dans un réseau cartésien défini par les équations

$$x = m\alpha, \quad y = n\beta.$$

Prenons l'axe Ox pour support de l'échelle accolée. Les droites α coupent l'axe Ox suivant l'échelle α. L'échelle β s'obtient par projection sur l'axe Ox des points d'intersection des droites β avec

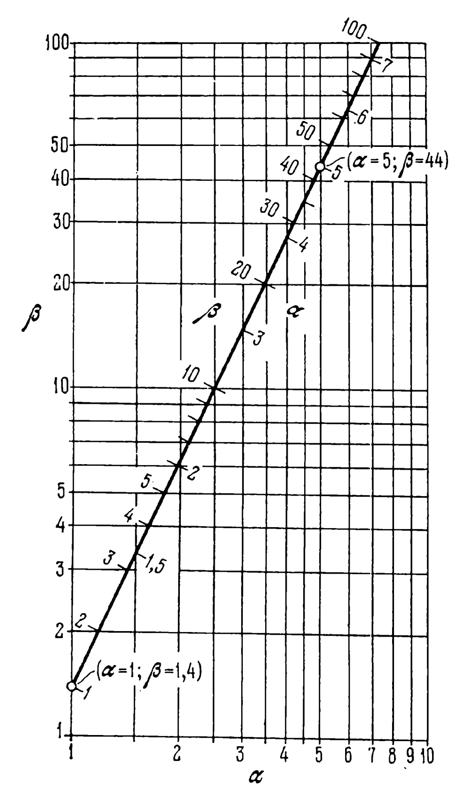


Fig. 71. Transformation dans une échelle accolée du graphe de la fonction $\beta = 1{,}4\alpha^{2{,}142}$ tracé dans une échelle logarithmique

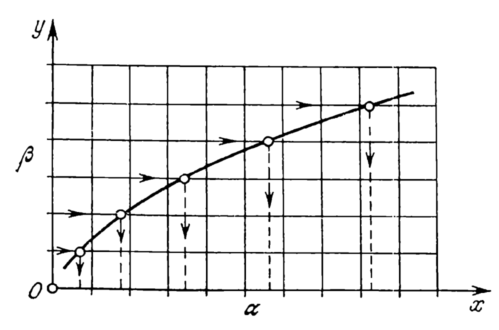


Fig. 72. Transformation dans une échelle accolée du graphe de la fonction $\beta = F(\alpha)$ tracé dans le réseau cartésien (α, β)

le graphe. En définitive on obtient l'échelle accolée α et β (fig. 73). L'échelle α est métrique, l'échelle β fonctionnelle.

On construirait de façon analogue une échelle accolée constituée d'une échelle métrique β et d'une échelle fonctionnelle α en prenant

Fig. 73. Schéma de l'échelle accolée α et β obtenu par la construction de la figure 72

pour support l'axe Oy. Il faudra alors projeter sur l'axe Oy les points d'intersection des droites α avec le graphe.

§ 3.9. Méthode analytique de construction d'une échelle accolée

Soit à construire une échelle accolée verticale pour la relation (3.1). Prenons une *fonction arbitraire* Φ des deux membres de l'équation (3.1) et introduisons les *paramètres de transformation* m et a:

$$a + m\Phi(\beta) = a + m\Phi[F(\alpha)].$$

Puis supposons que les deux membres de l'équation obtenue sont égaux à l'ordonnée y. On obtient les équations suivantes des échelles de l'abaque

échelle β:

$$x = 0, \quad y = a + m\Phi(\beta);$$

échelle α:

$$x = 0, \quad y = a + m\Phi[F(\alpha)].$$

La projection de l'échelle accolée consiste à choisir dûment la fonction arbitraire Φ et les paramètres m et a.

S'il faut trouver la réponse β avec une erreur absolue ou relative constantes, on suppose respectivement que $\Phi(\beta) = \beta$ ou $\Phi(\beta) = \log \beta$.

Le paramètre m définit les dimensions de l'échelle accolée, le paramètre a sa disposition par rapport à l'origine des coordonnées.

Supposons que la fonction $\Phi[F(\alpha)]$ est croissante et que la variable α évolue entre α_1 et α_2. Supposons que L est la longueur admissible de l'échelle accolée. Déterminons la valeur du paramètre m correspondant à L. Formons l'équation

$$L = y_2 - y_1 = \{a + m\Phi[F(\alpha_2)]\} - \{a + m\Phi[F(\alpha_1)]\}.$$

De là on déduit

$$m = \frac{L}{\Phi[F(\alpha_2)] - \Phi[F(\alpha_1)]}.$$

Si nous voulons que l'origine des coordonnées tombe au point de l'échelle α coté α_1, nous devons tirer le paramètre a de l'équation

$$y_1 = 0 = a + m\Phi\,[F(\alpha_1)]$$

d'où il vient

$$a = -m\Phi\,[F(\alpha_1)].$$

Après avoir défini la forme de la fonction Φ et les valeurs des paramètres m et a, on dresse le tableau des valeurs de y comme une fonction de α et le tableau des valeurs de y comme une fonction de β, et on trace les échelles α et β sur un même support.

Exemple 23. Tracer l'échelle accolée de la relation (2.17)

$$t = t(u) = 9{,}81\,\frac{u^3(1+u)^3}{1+2u}$$

dans l'intervalle $0{,}1 \leqslant u \leqslant 0{,}5$.

On a $u_1 = 0{,}1$; $u_2 = 0{,}5$. D'où

$$t(0{,}1) = 9{,}81\,\frac{0{,}1^3\cdot(1+0{,}1)^3}{1+2\cdot 0{,}1} = 0{,}0109;$$

$$t(0{,}5) = 9{,}81\,\frac{0{,}5^3\cdot(1+0{,}5)^3}{1+2\cdot 0{,}5} = 2{,}07.$$

Posons $\Phi(t) = \log t$. Soit $L \approx 110$ mm la longueur de l'échelle. Déterminons

$$m = \frac{110}{\log t(0{,}5) - \log t(0{,}1)} =$$

$$= \frac{110}{\log 2{,}07 - \log 0{,}0109} = 48{,}3 \text{ mm}.$$

Fig. 74. Echelle accolée pour la relation $t = 9{,}81\,\dfrac{u^3(1+u)^3}{1+2u}$

Posons $m = 50$ mm. Plaçons l'origine des coordonnées au point de l'échelle u coté 0,1. Calculons la valeur du paramètre a

$$a = -50 \log t(0{,}1) = -50 \log 0{,}0109 = 98{,}1 \text{ mm}.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

échelle t:

$$x = 0, \quad y = 98{,}1 + 50 \log t;$$

échelle u:

$$x = 0, \quad y = 98{,}1 + 50 \log \frac{9{,}81u^3(1+u)^3}{1+2u}.$$

L'échelle accolée correspondante est représentée sur la figure 74. Si par exemple $t = 0{,}36$, on lit sur l'abaque $u = 0{,}3$.

§ 3.10. Abaques à système d'échelles accolées

Généralisons la méthode des échelles accolées au cas d'un système d'équations de la forme

$$f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha_2) = \ldots = f_n(\alpha_n). \tag{3.24}$$

L'abaque du système d'équations (3.24) doit être constitué de n échelles portées par un même support. Comme un support ne peut porter que deux échelles, on trace les échelles sur des droites parallèles et on les relie par une famille de directrices parallèles. On obtient un *abaque à système d'échelles accolées.* Ceci étant, sur chaque support on peut porter soit une soit deux échelles. La distance entre les supports des échelles est arbitraire. Elle est choisie à partir des conditions de disposition des directrices et des inscriptions. La figure 75 représente l'abaque correspondant au cas où les droites parallèles ne portent qu'une échelle.

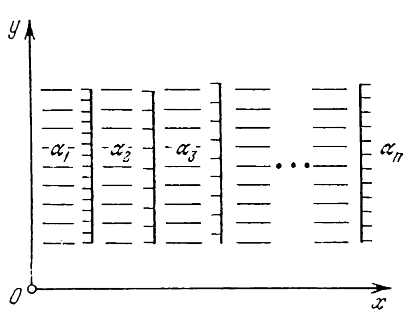


Fig. 75. Schéma d'un abaque du système d'équations (3.24)

Par analogie avec l'échelle accolée, on peut écrire les équations des éléments de l'abaque d'un système d'échelles accolées de la sorte :

échelle α_1 :

$$x = h_1, \quad y = a + m\Phi\,[f_1(\alpha_1)];$$

échelle α_2 :

$$x = h_2, \quad y = a + m\Phi\,[f_2(\alpha_2)];$$

$$. \quad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

échelle α_n :

$$x = h_n, \quad y = a + m\Phi\,[f_n(\alpha_n)].$$

Ici $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sont les abscisses des supports des échelles.

Le mode d'emploi de cet abaque entraîne que les points dont les cotes vérifient le système d'équations (3.24) doivent être situés sur une même directrice.

CHAPITRE 4

ABAQUES À ENTRECROISEMENT

§ 4.1. Abaque à entrecroisement général

Les *abaques à entrecroisement* permettent de représenter pratiquement toute relation entre trois variables

$$F\ (u,\ v,\ w) = 0. \tag{4.1}$$

Nous utiliserons parfois cette relation sous la forme explicite:

$$v = \Phi\ (u,\ w). \tag{4.2}$$

Convenons que u est la première variable, v la seconde, w la troisième.

Pour tracer l'abaque à entrecroisement de la relation (4.1), considérons un champ binaire arbitraire des variables u et v. Donnons à la variable w une série de valeurs fixes $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n$ et

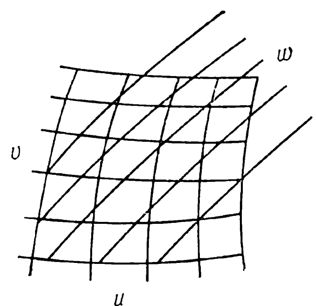


Fig. 76. Schéma d'un abaque pour l'équation $F\ (u,\ v,\ w) = 0$

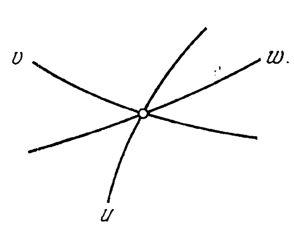


Fig. 77. Clef de l'abaque à entrecroisement de la figure 76

traçons dans le réseau $(u,\ v)$ les graphes de la relation (4.2) pour des valeurs fixes choisies de w. Inscrivons à côté de chaque graphe la valeur correspondante de w. On obtient ainsi l'abaque à entrecroisement de la figure 76 qui est constitué de trois familles de lignes u, v et w.

Le mode d'emploi de cet abaque découle directement de sa construction. Si les variables u, v et w vérifient l'équation (4.1),

les lignes cotées u, v et w passent par un point que nous appellerons *point résolvant ou de résolution*. Le mode d'emploi de l'abaque peut être schématiquement représenté sous forme de la clef de la figure 77.

L'abaque à entrecroisement est à résolution totale, i.e. chacune des variables u, v et w peut être inconnue. Ainsi pour déterminer w, u et v étant données, on trouve le point d'intersection des lignes dont les cotes sont égales à u et v. La cote de la ligne w passant par ce point donne la réponse. Les autres problèmes se résolvent de façon analogue.

Si le champ binaire (u, v) est donné dans un système de coordonnées rectangulaires xOy par les équations

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \tag{4.3}$$

on peut construire la famille de lignes w à l'aide de son équation paramétrique qui se déduit de l'équation du champ (4.3) par substitution à la variable v de son expression (4.2):

$$x = f[u, \Phi(u, w)], \quad y = g[u, \Phi(u, w)]. \tag{4.4}$$

Dans les équations (4.4), la variable u est considérée comme un paramètre. En l'éliminant on obtient l'équation de la famille de lignes w

$$F_3(x, y, w) = 0.$$

Les équations des familles de lignes u et v se déterminent par élimination successive des variables v et u entre les équations du champ binaire (4.3). On obtient

$$F_1(x, y, u) = 0, \quad F_2(x, y, v) = 0.$$

Les indices des fonctions F_1, F_2 et F_3 montrent que ces fonctions dépendent des variables portant le même numéro.

En construisant l'abaque à entrecroisement de la relation (4.1), on peut se donner arbitrairement deux des trois familles de lignes. On pourra donc prendre toujours deux *familles de droites*, mais la troisième sera d'une façon générale une *famille de courbes*.

En résumé donc, un abaque à entrecroisement peut être construit de deux façons.

La première est *synthétique*. Lorsqu'on construit un abaque avec cette méthode, on trace de façon tout à fait arbitraire un champ binaire (u, v) sur l'intervalle de variation des variables, ou bien on utilise une échelle fonctionnelle quelconque déjà prête. On trace ensuite point par point la famille de lignes w à l'aide de l'équation (4.2) dans le réseau (u, v). Dans ce cas on ne recourt pas à un système de coordonnées rectangulaires. Il n'est donc pas nécessaire de connaître les équations des familles de lignes u, v et w.

La deuxième est *analytique*. Elle est basée sur l'introduction d'un système de coordonnées rectangulaires xOy. Dans ce système

on se donne des équations arbitraires de deux familles de lignes (ou, ce qui est équivalent, des équations du champ binaire). On établit l'équation de la troisième famille en se servant de l'équation initiale et de l'équation des deux familles données. Ensuite on trace indépendamment l'une de l'autre trois familles de lignes qui formeront l'abaque à entrecroisement de la relation (4.1).

§ 4.2. Abaque à entrecroisement rectiligne

Déterminons la forme de l'équation (4.1) qui permet de construire un abaque à entrecroisement composé de trois familles de droites u,

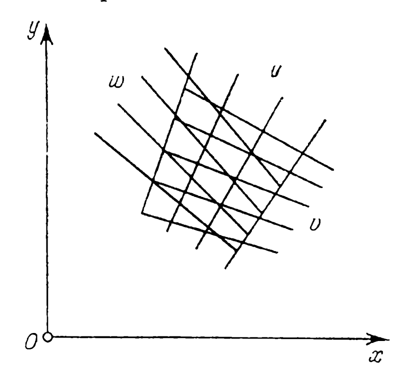


Fig. 78. Schéma d'un abaque rectiligne à entrecroisement pour l'équation (4.8)

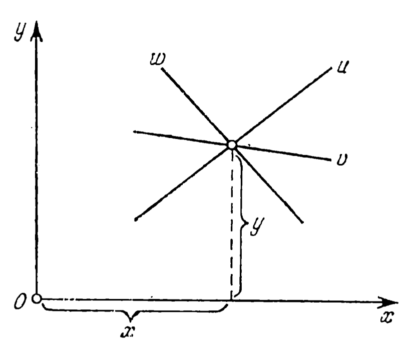


Fig. 79. Clef de l'abaque rectiligne à entrecroisement de la figure 78

v et w (fig. 78). Cet abaque s'appelle *abaque à entrecroisement rectiligne.*

Supposons que l'on ait un tel abaque. Les équations de ses familles de droites u, v et w s'écrivent:

$$f_1 x + g_1 y + 1 = 0, \qquad (4.5)$$

$$f_2 x + g_2 y + 1 = 0, \qquad (4.6)$$

$$f_3 x + g_3 y + 1 = 0, \qquad (4.7)$$

où, pour abréger, on a posé $f_1 = f_1(u)$, $g_1 = g_1(u)$, $f_2 = f_2(v)$, $g_2 = g_2(v)$, $f_3 = f_3(w)$, $g_3 = g_3(w)$. En vertu de la clef (cf. fig. 79) les droites définies par ces équations doivent passer par le point de coordonnées x et y si leurs cotes vérifient l'équation cherchée.

La condition de compatibilité du système d'équations (4.5), (4.6) et (4.7) par rapport aux coordonnées du point x et y est la nullité du déterminant du système

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.8)$$

On reconnaît ici l'équation (4.8) représentable par un abaque à entrecroisement rectiligne.

Inversement, si est donnée l'équation (4.8), les équations des familles de droites u, v et w se déduisent des équations (4.5), (4.6) et (4.7).

Indiquons maintenant un autre procédé de déduction de l'équation (4.8) représentable par un abaque à entrecroisement rectiligne. Eliminons les variables x et y entre les équations (4.5), (4.6) et (4.7). Retranchons (4.5) de (4.6) et (4.7)

$$(f_2 - f_1)\, x + (g_2 - g_1)\, y = 0, \tag{4.9}$$

$$(f_3 - f_1)\, x + (g_3 - g_1)\, y = 0. \tag{4.10}$$

Les équations (4.9) et (4.10) entraînent

$$-\frac{y}{x} = \frac{f_2 - f_1}{g_2 - g_1}, \qquad -\frac{y}{x} = \frac{f_3 - f_1}{g_3 - g_1},$$

d'où

$$\frac{f_2 - f_1}{g_2 - g_1} = \frac{f_3 - f_1}{g_3 - g_1}. \tag{4.11}$$

L'équation (4.11) est une autre forme d'écriture de l'équation (4.8). Ces deux formes ont cours en nomographie.

Dans l'équation (4.8) on peut introduire identiquement neuf paramètres arbitraires et obtenir de nouveau une équation de la même forme:

$$\begin{vmatrix} \overline{f}_1 & \overline{g}_1 & 1 \\ \overline{f}_2 & \overline{g}_2 & 1 \\ \overline{f}_3 & \overline{g}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{4.12}$$

où

$$\overline{f}_i = \frac{a_{11} f_i + a_{12} g_i + a_{13}}{a_{31} f_i + a_{32} g_i + a_{33}}, \qquad \overline{g}_i = \frac{a_{21} f_i + a_{22} g_i + a_{23}}{a_{31} f_i + a_{32} g_i + a_{33}},$$

$$i = 1,\ 2,\ 3.$$

Les paramètres a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32} et a_{33} doivent vérifier la condition

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.13}$$

Par un calcul immédiat on s'assure que l'équation (4.12) est identique à l'équation (4.8).

Si maintenant l'on écrit les équations des familles de droites u, v et w pour la relation (4.12), on constatera que ces équations renferment les paramètres introduits:

droites u:

$$\frac{a_{11}f_1+a_{12}g_1+a_{13}}{a_{31}f_1+a_{32}g_1+a_{33}}x+\frac{a_{21}f_1+a_{22}g_1+a_{23}}{a_{31}f_1+a_{32}g_1+a_{33}}y+1=0; \qquad (4.14)$$

droites v:

$$\frac{a_{11}f_2+a_{12}g_2+a_{13}}{a_{31}f_2+a_{32}g_2+a_{33}}x+\frac{a_{21}f_2+a_{22}g_2+a_{23}}{a_{31}f_2+a_{32}g_2+a_{33}}y+1=0; \qquad (4.15)$$

droites w:

$$\frac{a_{11}f_3+a_{12}g_3+a_{13}}{a_{31}f_3+a_{32}g_3+a_{33}}x+\frac{a_{21}f_3+a_{22}g_3+a_{23}}{a_{31}f_3+a_{32}g_3+a_{33}}y+1=0. \qquad (4.16)$$

Des neuf paramètres introduits dans les équations (4.14), (4.15) et (4.16) des familles de droites u, v et w, seuls huit sont essentiels, puisque les numérateurs et les dénominateurs des fractions peuvent toujours être divisés par l'un des paramètres a_{31}, a_{32} ou a_{33}.

La projection de l'abaque à entrecroisement rectiligne de la relation (4.8) ou (4.11) consiste donc à choisir ces huit paramètres tels que l'abaque soit d'un emploi souple.

§ 4.3. Abaque cartésien

On a vu précédemment qu'on pouvait arbitrairement choisir le champ binaire (u, v) pour construire l'abaque à entrecroisement de la relation (4.1). Il est tout naturel de prendre l'équation du champ sous une forme telle que le réseau (u, v) soit orthogonal. L'équation du champ (u, v) sera donc de la forme

$$x = m\,[f_1(u) - a], \quad y = n\,[f_2(v) - b], \qquad (4.17)$$

où m, n, a et b sont des paramètres de transformation. En construisant dans le réseau (u, v) une famille de lignes w à l'aide de l'équation (4.2), on obtient l'abaque à entrecroisement de la figure 80 qui est dit *abaque cartésien*.

Si l'on pose $f_1(u) = u$ et $f_2(v) = v$ dans les équations (4.17) du champ (u, v), on obtient un *abaque cartésien simple à réseau métrique* (u, v). Si l'on pose $f_1(u) = \log u$ et $f_2(v) = \log v$ dans les équations (4.17), on obtient un *abaque cartésien à réseau logarithmique* (u, v). Pour son tracé on a intérêt à se servir du papier logarithmique.

Expliquons le sens géométrique des paramètres a, b, m et n.

Les paramètres a et b définissent la position de l'origine des coordonnées. Supposons que les fonctions $f_1(u)$ et $f_2(v)$ soient monotones croissantes et que les variables u et v évoluent dans les limites

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \quad v_1 \leqslant v \leqslant v_2.$$

Convenons de placer l'origine des coordonnées au point du réseau (u, v) de cotes u_1 et v_1. On peut alors écrire

$$0 = m\,[f_1(u_1) - a], \quad 0 = n\,[f_2(v_1) - b],$$

d'où

$$a = f_1(u_1), \quad b = f_2(v_1).$$

Les paramètres m et n définissent les dimensions du réseau dans le sens de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées. Soient L_x

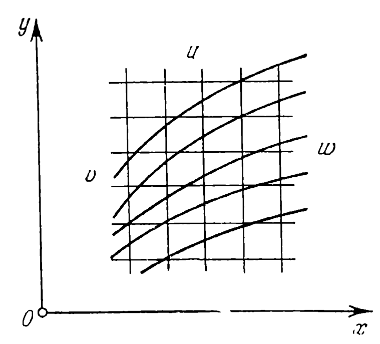


Fig. 80. Schéma d'un abaque cartésien pour l'équation $v = \Phi(u, w)$

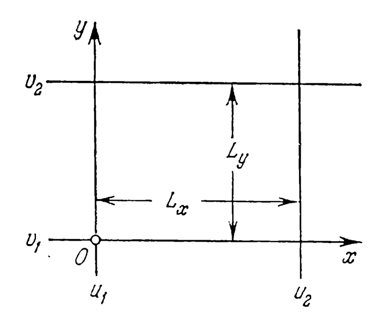


Fig. 81. Construction d'un réseau (u, w) dans un abaque cartésien pour l'équation $v = \Phi(u, w)$

la longueur du réseau sur l'axe Ox et L_y sur l'axe Oy (fig. 81). Les valeurs des paramètres m et n pour lesquelles le réseau admettra L_x et L_y pour longueurs seront tirées des équations

$$L_x = m\,[f_1(u_2) - f_1(u_1)],$$
$$L_y = n\,[f_2(v_2) - f_2(v_1)],$$

d'où il vient

$$m = \frac{L_x}{f_1(u_2) - f_1(u_1)},$$

$$n = \frac{L_y}{f_2(v_2) - f_2(v_1)}.$$

Exemple 24. L'aire des figures contenues dans un livre se calcule par la formule

$$w = uv,$$

où u et v sont les dimensions du rectangle comprenant la figure. Construisons l'abaque à entrecroisement de cette formule sous la forme d'un abaque cartésien à réseau métrique (u, v).

Faisons varier u et v entre 0 et 15 cm. Prenons $L_x = L_y = 150$ mm. De là il suit que les modules m et n seront égaux à 10 mm. Prenons les paramètres a et b égaux à zéro.

Les équations du réseau (u, v) s'écrivent

$$x = 10\,u, \quad y = 10\,v.$$

L'équation de la famille de lignes w est

$$w = \frac{xy}{100}.$$

On reconnaît l'équation d'hyperboles équilatères admettant les axes Ox et Oy pour asymptotes. Pour construire cette famille dressons le tableau des valeurs de y comme fonction de x pour des valeurs fixes de w. Supposons par exemple que $w = 100$. Il vient

$$y = \frac{10\,000}{x}.$$

Dressons le tableau 11 à l'aide de cette formule. Traçons la ligne $w = 100$ à l'aide du tableau 11. Construisons de façon analogue

Tableau 11

x	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y	142,9	125	111,1	100	90,9	83,3	76,9	71,3	66,7

les lignes correspondant aux valeurs $w = 10; 20; \ldots; 90$. Menons les droites $u = 5;\ 10;\ 15$ et $v = 5;\ 10;\ 15$. On obtient l'esquisse de l'abaque représenté sur la figure 82.

Il sera commode d'utiliser cet abaque de la manière suivante (fig. 83). Traçons sur du papier calque la famille de lignes w et les axes de coordonnées. Pour déterminer l'aire de la figure rectangulaire appliquons sur cette dernière les lignes w de telle sorte que le point O vienne en coïncidence avec le sommet inférieur gauche du rectangle et l'axe Ox avec le côté inférieur. On lira la réponse w en face du sommet supérieur droit du rectangle. Ce mode d'emploi dispense de mesurer les segments u et v. Ceux-ci sont automatiquement introduits dans l'abaque.

Exemple 25. Construisons l'abaque cartésien de la formule

$$C = \frac{1}{n} R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)}, \qquad (4.18)$$

qui définit le coefficient de Chezy C figurant dans la formule complète de N. Pavlovski comme fonction du coefficient de rugosité n et du rayon hydraulique R. Ce dernier varie entre 0,1 et 3 m, quant à n il prend les valeurs discrètes suivantes: 0,011; 0,013; 0,017; 0,020; 0,025; 0,030. Faisons varier C entre 10 et 100.

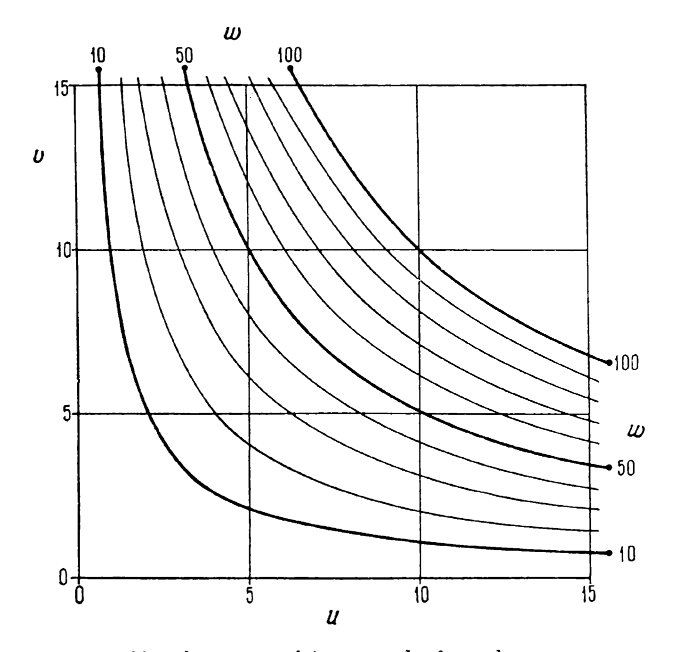


Fig. 82. Abaque cartésien pour la formule $w = uv$

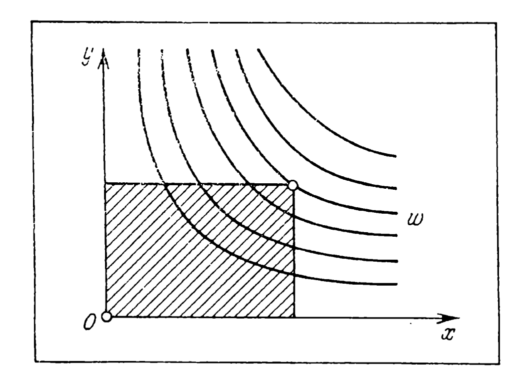


Fig. 83. Calcul de l'aire d'une figure rectangulaire à l'aide d'une famille de lignes w de l'abaque de la figure 82

Représentons la variable C par une famille de droites parallèles équidistantes et la variable R par une famille logarithmique de

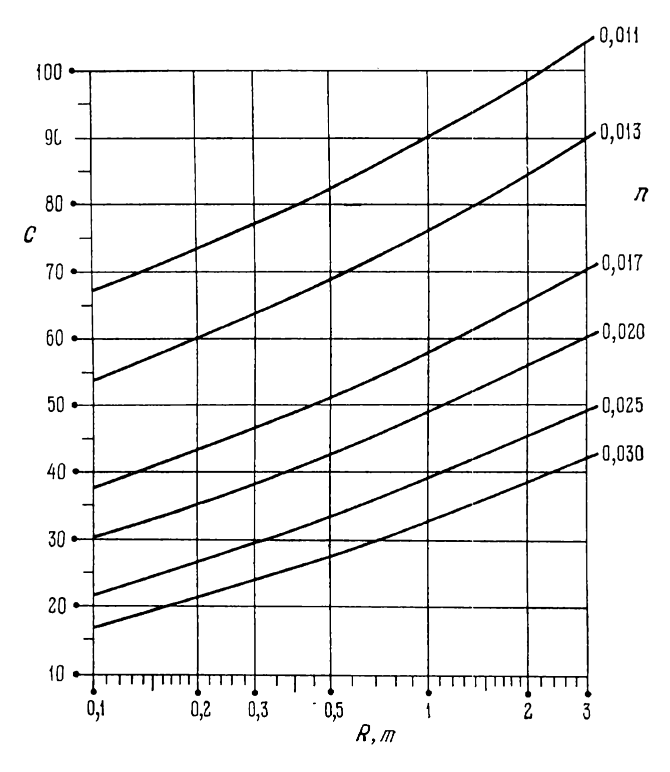


Fig. 84. Abaque cartésien pour la formule $C = \frac{1}{n} R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)}$ tracé dans un réseau semi-logarithmique (C, R)

droites parallèles. Compte tenu des limites de variation des variables et des dimensions de la figure, prenons les équations du réseau (C, R) de la forme

$$x = 100\,(\log R - \log 0{,}1), \quad y = 2\,(C - 10).$$

Inscrivons les cotes des droites R et C sur du papier semi-logarithmique en vertu de ces équations. Construisons la famille de lignes n en utilisant le tableau des valeurs de C, emprunté à un guide pratique d'hydraulique. On trouvera plus bas un extrait du tableau des valeurs de C (tableau 12).

L'abaque de l'équation (4.18) est représenté sur la figure 84.

Tableau 12

Valeurs de C

R, m \ n	0,011	0,013	0,017	0,020	0,025	0,030
0,1	67,2	54,3	38,1	30,6	22,4	17,3
0,2	73,7	60,4	43,6	35,7	26,9	21,3
0,3	77,7	64,3	47,2	39,0	29,9	24,0
0,5	83,1	69,5	51,9	43,5	34,0	27,8
1	90,9	76,9	58,8	50,0	40,0	33,3
2	99,3	84,8	65,9	56,6	46,0	38,9
3	104,4	89,4	69,8	60,3	49,3	41,9

§ 4.4. Abaque cartésien rectiligne

Trouvons la forme de la relation (4.1) représentable par un *abaque cartésien rectiligne.* Supposons que cet abaque a été déjà construit (fig. 85). Les équations de ses familles de lignes s'écrivent :

droites u :

$$x = f_1(u); \qquad (4.19)$$

droites v :

$$y = f_2(v); \qquad (4.20)$$

droites w :

$$f_3(w)\,x + g_3(w)\,y + h_3(w) = 0. \qquad (4.21)$$

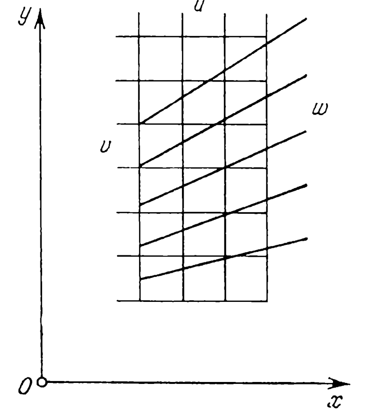


Fig. 85. Schéma d'un abaque rectiligne cartésien pour l'équation $f_1f_3 + f_2g_3 + h_3 = 0$

En éliminant x et y entre les équations (4.19), (4.20) et (4.21) on trouve la relation

$$f_1f_3 + f_2g_3 + h_3 = 0, \qquad (4.22)$$

qui est représentable par un abaque cartésien rectiligne. La relation obtenue s'appelle *forme de Cauchy.* Elle est très importante en nomographie, car les relations à trois variables les plus fréquentes en pratique s'y ramènent souvent.

La forme de Cauchy est élémentaire. En effet elle est constituée d'une somme de trois termes, dont le premier est un produit d'une fonction de la première variable par une fonction de la troisième variable, le second un produit d'une fonction de la deuxième variable par une fonction de la troisième variable et, enfin, la troisième

une fonction de la troisième variable. Dans les cas particuliers, l'une des fonctions f_3 ou g_3 peut être une constante non nulle tandis que la fonction h_3, une constante susceptible d'être nulle.

Supposons maintenant que la relation donnée ou proposée est de la forme de Cauchy (4.22). Les équations des éléments de son abaque sont alors déterminées à partir des équations (4.19), (4.20) et (4.21). Mais l'abaque cartésien rectiligne tracé à l'aide de ces équations peut s'avérer incommode à l'usage. Pour le rendre praticable, introduisons dans l'équation (4.22) les paramètres de transformation m, n, a et b, en procédant par exemple ainsi :

$$[m(f_1-a)]\frac{f_3}{m}+[n(f_2-b)]\frac{g_3}{n}+(af_3+bg_3+h_3)=0.$$

On obtient de nouveau une forme de Cauchy

$$\overline{f}_1\overline{f}_3+\overline{f}_2\overline{g}_3+\overline{h}_3=0,$$

où les nouvelles fonctions $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$, $\overline{g}_3$ et $\overline{h}_3$ sont définies comme suit :

$$\overline{f}_1=m(f_1-a),\quad \overline{f}_2=n(f_2-b),\quad \overline{f}_3=f_3/m,$$
$$\overline{g}_3=g_3/n,\quad \overline{h}_3=af_3+bg_3+h_3.$$

Les équations des familles de lignes u, v et w contenant les paramètres de transformation s'écrivent :

famille u :

$$x=m(f_1-a);$$

famille v :

$$y=n(f_2-b);$$

famille w :

$$\frac{f_3}{m}x+\frac{g_3}{n}y+af_3+bg_3+h_3=0.$$

Donc les équations du réseau (u, v) représentées dans un abaque cartésien rectiligne coïncident avec l'équation du même réseau représentée dans un abaque cartésien dont la troisième famille est une famille de courbes. La méthode de construction des réseaux (u, v) est la même pour les deux abaques. Elle consiste à choisir les paramètres m, n, a et b. La famille w étant une famille de droites, elle est bien plus simple à calculer et à construire qu'une famille de courbes.

Exemple 26. Traçons un abaque cartésien rectiligne pour l'équation

$$uw+v(e^w-1)-we^w=0, \qquad (4.23)$$

où

$$0 \leqslant u \leqslant 3{,}5; \quad 0 \leqslant v \leqslant 6; \quad 1 \leqslant w \leqslant 6.$$

L'équation (4.23) est de la forme de Cauchy (4.22). Ici

$$f_1 = u, \quad f_2 = v, \quad f_3 = w, \quad g_3 = e^w - 1, \quad h_3 = -we^w.$$

Les équations des éléments de l'abaque contenant les paramètres de transformation s'écrivent:

famille de droites u:

$$x = m(u - a);$$

famille de droites v:

$$y = n(v - b);$$

famille de droites w:

$$\frac{w}{m} x + \frac{e^w - 1}{n} y + aw + b(e^w - 1) - we^w = 0.$$

Les limites inférieures de variation de u et v étant nulles, posons $a = b = 0$. Les équations des éléments de l'abaque se récrivent alors:

famille de courbes u:

$$x = mu;$$

famille de courbes v:

$$y = nv;$$

famille de droites w:

$$\frac{w}{m} x + \frac{e^w - 1}{n} y - we^w = 0.$$

Calculons les paramètres m et n. Donnons-nous les longueurs L_x et L_y du réseau rectangulaire (u, v) (cf. fig. 81). Supposons que $L_x = 200$ mm, $L_y = 150$ mm. Les limites inférieures de u et v étant égales à zéro et les limites supérieures respectivement à 3,5 et 6, on obtient

$$m = \frac{L_x}{u_2 - u_1} = \frac{200}{3{,}5 - 0} = 57{,}1 \approx 60 \text{ mm},$$

$$n = \frac{L_y}{v_2 - v_1} = \frac{150}{6 - 0} = 25 \text{ mm}.$$

Donc $m = 60$ mm et $n = 25$ mm. Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

famille de droites u:

$$x = 60\,u;$$

famille de courbes v:

$$y = 25\,v;$$

famille de courbes w:

$$\frac{w}{60}x+\frac{e^w-1}{25}y-we^w=0.$$

L'équation de la famille de droites w se récrit:

$$y=-\frac{5}{12}\frac{w}{e^w-1}x+25\frac{we^w}{e^w-1}$$

ou

$$y=Ax+B,$$

où

$$A=-\frac{5}{12}\frac{w}{e^w-1},\qquad B=25\frac{we^w}{e^w-1}.$$

Le tableau 13 représente les valeurs de A et B correspondant aux valeurs de 1 à 6 de w.

Tableau 13

w	A	B
1	—0,242	39,5
2	—0,130	57,8
3	—0,065	78,9
4	—0,031	101,9
5	—0,014	125,8
6	—0,006	150,4

Traçons l'abaque. Construisons un réseau rectangulaire métrique (u, v) de modules $m = 60$ mm et $n = 25$ mm. Menons les droites $u = 0$; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5 et les droites $v = 0$; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Pour tracer les droites w de cotes 1; 2; 3; 4; 5; 6 dressons le tableau de valeurs de y pour deux valeurs quelconques de x, par exemple pour $x = 0$ et $x = 100$. On obtient $y = B$ pour $x = 0$ et $y = 100\,A + B$ pour $x = 100$. Utilisons ces équations pour dresser le tableau 14.

Tableau 14

w	y	
	pour $x = 0$	pour $x = 100$
1	39,5	15,3
2	57,8	44,8
3	78,9	72,4
4	101,9	98,8
5	125,8	124,4
6	150,4	149,8

Pour tracer la droite $w = 1$, marquons les points de coordonnées $x = 0$ et $y = 39{,}5$; $x = 100$ et $y = 15{,}3$. Menons une droite par ces

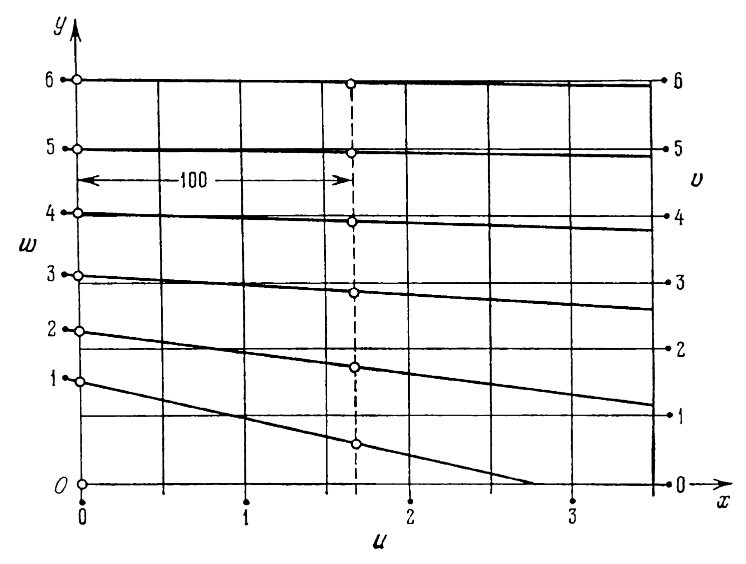


Fig. 86. Abaque cartésien rectiligne pour l'équation $uw + v(e^w - 1) - we^w = 0$ tracé dans le réseau métrique (u, w)

points et affectons-lui la cote $w = 1$. Les autres droites w se tracent de façon analogue. L'abaque est représenté sur la figure 86. Son inconvénient est que les droites $w = 4$; 5 ; 6 et les droites v se coupent sous un angle aigu.

CHAPITRE 5

TRANSFORMATION DES ABAQUES À ENTRECROISEMENT EN ABAQUES À POINTS ALIGNÉS ET À POINTS ÉQUIDISTANTS

§ 5.1. Méthode générale de transformation des abaques à entrecroisement en abaques à points alignés et à points équidistants

Un grave défaut des abaques à entrecroisement de l'équation (4.1) est la présence de trois familles de lignes superposées, qui encombrent le dessin et en rendent la lecture harassante.

Pour pallier à ce défaut on peut par exemple procéder à une transformation de l'abaque à entrecroisement en un abaque *à points alignés et à points équidistants*, fondée sur la possibilité de choisir à la place d'une ou de deux familles de lignes du réseau à entrecroisement des faisceaux de droites ou des familles de cercles concentriques.

Abaque à points alignés. Supposons qu'une des familles de lignes du réseau à entrecroisement, par exemple la famille w, est un faisceau arbitraire de droites de centre un point P. Choisissons de façon arbitraire la famille de lignes v. Traçons la famille de lignes u dans le réseau (v, w) obtenu à l'aide de l'équation (4.2). Faisons couper le faisceau de droites w par une ligne quelconque. Les droites w y déterminent une échelle w. Retirons ensuite le faisceau w en ne laissant sur la figure que le centre P et l'échelle w. Nous obtenons l'abaque de la figure 87 qui est constitué du point fixe P, du champ binaire (u, v) et de l'échelle w.

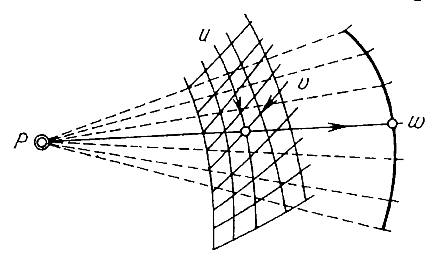


Fig. 87. Abaque à points alignés déduit d'un abaque à entrecroisement pour l'équation $F(u, v, w) = 0$, en remplaçant le faisceau de droites w par son centre P et l'échelle w

Pour déterminer w correspondant aux valeurs données de u et v appliquons une règle sur le point fixe P et sur le point donné du champ binaire. Le point d'intersection de la règle avec l'échelle w nous donne la réponse. On résout les autres problèmes de façon analogue.

On peut formuler ainsi le mode d'emploi de l'abaque. Si les variables $u = u_0$, $v = v_0$ et $w = w_0$ vérifient l'équation (4.1) le point du champ binaire coté (u_0, v_0), le point de l'échelle w coté w_0 et le point fixe P sont alignés.

L'abaque de la figure 87 est un cas particulier de l'*abaque à points alignés à trois champs binaires* (fig. 61) lorsque l'un des champs se réduit à un point fixe et un autre champ à une échelle. L'avantage de l'abaque obtenu sur un abaque à entrecroisement tient à l'absence de la troisième famille qui est remplacée par un point et une échelle. Cet abaque peut servir de base à la construction d'appareils nomographiques puisque le pivotement d'une droite autour du point fixe P peut sans aucune peine être réalisé mécaniquement.

En projetant l'abaque il faut choisir le faisceau de droites w et la famille de lignes v tels que le champ binaire (u, v) soit commode à l'usage. Pour ce qui est de l'échelle w, on peut, étant donné que son support est arbitrairement choisi, la graduer de façon à lire la réponse sans peine.

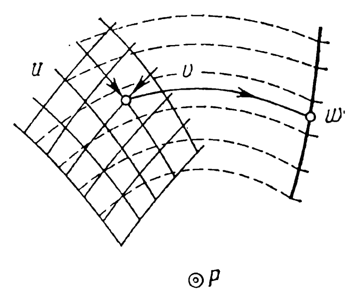


Fig. 88. Abaque à points équidistants déduit d'un abaque à entrecroisement pour l'équation $F(u, v, w) = 0$, en remplaçant la famille de cercles concentriques w par leur centre P et l'échelle w

Abaque à points équidistants. Convenons maintenant que l'une des familles de lignes de l'abaque à entrecroisement, par exemple w, est une famille arbitraire de cercles concentriques de centre P. Choisissons arbitrairement la deuxième famille de lignes v. Traçons la famille de lignes u à l'aide de l'équation (4.2) dans le réseau (v, w) obtenu.

Coupons la famille w par une ligne. On obtient l'échelle w. Retirons ensuite la famille de cercles concentriques w et laissons seulement le point P et l'échelle w. On obtient l'abaque de la figure 88 formé du point fixe P, du champ binaire (u, v) et de l'échelle w.

Pour se servir de cet abaque, il est nécessaire de disposer d'un compas. Pour déterminer w pour des valeurs données de u et v, on place une branche du compas en P et l'autre au point donné du champ binaire (u, v). Sans modifier l'ouverture du compas faisons le pivoter autour du point P jusqu'à son intersection avec l'échelle w où on lira la réponse. Les autres problèmes se résolvent de façon analogue.

On peut formuler ainsi le mode d'emploi de l'abaque. Si les variables u, v et w vérifient l'équation (4.1), le point du champ binaire (u, v) et le point de l'échelle w seront équidistants du point fixe P.

L'abaque de la figure 88 est un cas particulier de *l'abaque général à points équidistants* (cf. § 12.1).

Pour tracer l'abaque il faut choisir la famille de cercles concentriques w et la famille de lignes v de sorte à obtenir un champ (u, v) commode à l'usage. On peut obtenir la graduation que l'on veut en chosissant judicieusement le support de l'échelle w.

Abaques composés à points alignés et à points équidistants. Puisque deux familles de lignes de l'abaque à entrecroisement peuvent être

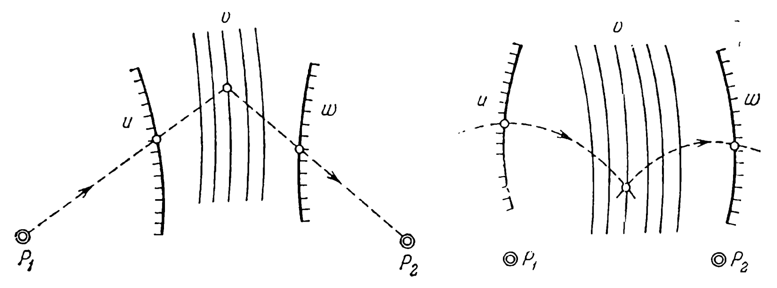


Fig. 89. Abaque composé à points alignés déduit d'un abaque à entrecroisement pour l'équation $F(u, v, w) = 0$, en remplaçant les faisceaux de droites u et w par leurs centres P_1 et P_2 et les échelles u et w

Fig. 90. Abaque composé à points équidistants déduit d'un abaque à entrecroisement pour l'équation $F(u, v, w) = 0$, en remplaçant les faisceaux de cercles concentriques u et w par leurs centres P_1 et P_2 et les échelles u et w

arbitraires, prenons-les sous forme de deux faisceaux de droites ou de deux familles de cercles concentriques. Traçons une famille de lignes attribuées à la troisième variable dans les réseaux obtenus, puis remplaçons les familles de droites et de cercles concentriques par des points fixes et des échelles comme nous l'avons fait précédemment. On obtient les abaques de la figure 89 et 90. L'abaque de la figure 89 est un *abaque composé à points alignés*. La réponse s'obtient par un double emploi de la règle. L'abaque de la figure 90 est un *abaque composé à points équidistants*. La réponse est donnée par deux ouvertures de compas. La méthode de construction des abaques est la même que précédemment. Les échelles u et w peuvent être arbitrairement graduées.

§ 5.2. Principe de dualité

Les transformations ultérieures des abaques à entrecroisement seront basées sur le *principe de dualité*.

Soient deux plans σ et $\bar{\sigma}$. Rapportons le plan σ à un système de coordonnées rectangulaires xOy et le plan $\bar{\sigma}$ à $\overline{xOy}$.

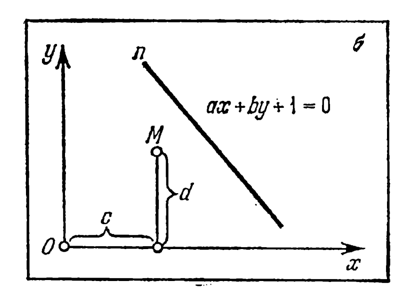
A tout point $M \in \sigma$ de coordonnées c et d (fig. 91), associons la droite $m \in \bar{\sigma}$ d'équation

$$c\bar{x} + d\bar{y} + 1 = 0.$$

Inversement, à toute droite $n \in \sigma$ d'équation

$$ax + by + 1 = 0 \tag{5.1}$$

associons le point $N \in \bar{\sigma}$ de coordonnées a et b.



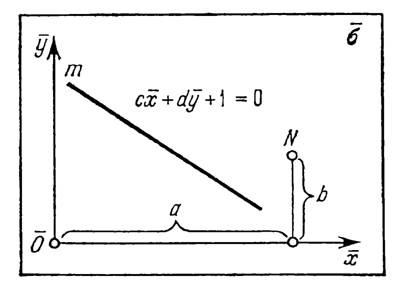
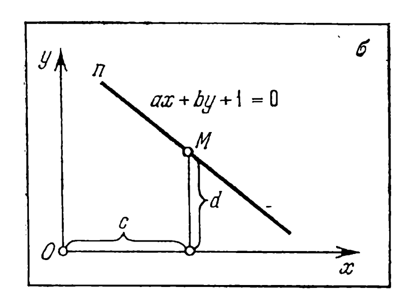


Fig. 91. Le point M $(c;\ d)$ et la droite n: $ax + by + 1 = 0$ du plan σ et leurs images: la droite m: $c\bar{x} + d\bar{y} + 1 = 0$ et le point N $(a;\ b)$ du plan $\bar{\sigma}$

On appellera *éléments duaux* le point $M \in \sigma$ et la droite $m \in \bar{\sigma}$, la droite $n \in \sigma$ et le point $N \in \bar{\sigma}$.



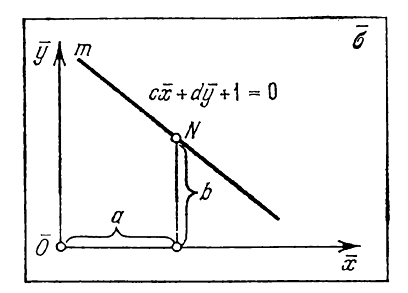


Fig. 92. Le point M $(c;\ d)$ et la droite n: $ax + by + 1 = 0$ passant par ce point et leurs images sur le plan $\bar{\sigma}$: la droite m: $c\bar{x} + d\bar{y} + 1 = 0$ et le point N $(a;\ b)$ situé sur elle

Théorème 1. *Si* (cf. fig. 92) *le point* $M \in \sigma$ *de coordonnées* c *et* d *est situé sur la droite* n

$$ax + by + 1 = 0,$$

la droite $m \in \bar{\sigma}$

$$c\bar{x} + d\bar{y} + 1 = 0$$

passe par le point N de coordonnées a et b.

Le point M est situé sur la droite n par hypothèse. Ses coordonnées vérifient donc l'équation de cette droite, i.e.

$$ca + bd + 1 = 0.$$

Pour que le point N soit situé sur la droite m, il faut que

$$ca + db + 1 = 0.$$

Or ceci est l'équation précédente.

Théorème 2. *Si* (cf. fig. 93) *des points* M_1, M_2 *et* M_3 *du plan* σ *sont portés par une même droite* n, *les droites* m_1, m_2 *et* m_3 *qui leur correspondent sur le plan* $\bar{\sigma}$ *sont concourantes au point* N.

Supposons en effet que la droite n a pour équation

$$ax + by + 1 = 0.$$

En vertu du théorème 1, la droite m_1 passe par le point N de coordonnées a et b. On peut en dire autant des droites m_2 et m_3.

Théorème 3. *Si* (cf. fig. 94) *des droites* n_1, n_2 *et* n_3 *du plan* σ *passent par un point* M, *les points* N_1, N_2 *et* N_3 *qui leur correspondent sur le plan* $\bar{\sigma}$ *sont situés sur une même droite* m.

Supposons en effet que c et d sont les coordonnées du point M. En vertu du théorème 1, le point N_1 doit être situé sur la droite m

$$c\bar{x} + d\bar{y} + 1 = 0.$$

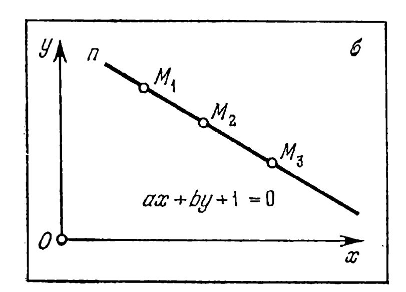
On peut en dire autant des points N_2 et N_3.

A toute courbe $S \in \sigma$ (cf. fig. 95) associons une courbe $\bar{S} \in \bar{\sigma}$. Pour cela nous considérerons que la courbe S est un ensemble de points. A chacun de ces points correspondra une droite sur le plan $\bar{\sigma}$, et à la courbe S une famille de droites. Définissons la *courbe duale* $\bar{S}$ comme l'enveloppe de cette famille.

Théorème 4. *Si* (cf. fig. 96) *des courbes* S_1 *et* S_2 *du plan* σ *passent par un point* M, *les courbes duales* $\bar{S}_1$ *et* $\bar{S}_2$ *du plan* $\bar{\sigma}$ *possèdent une tangente commune* m *correspondant au point* M.

En effet, le point M est situé sur la droite S_1, donc la droite m qui lui correspond sera tangente à la courbe $\bar{S}_1$. De façon analogue la droite m sera tangente à la courbe $\bar{S}_2$.

A signaler que la correspondance décrite n'est pas univoque. Ainsi au point M de coordonnées (0, 0), ne correspond aucun point m. Inversement, aux droites n passant par le point de coordonnées (0, 0),



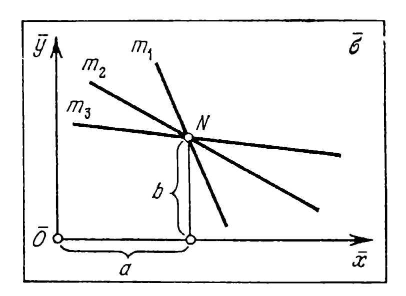
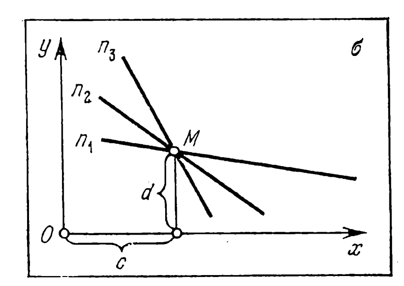


Fig. 93. Les points M_1, M_2 et M_3 du plan σ, situés sur la droite n: $ax + by + 1 = 0$ et leurs images du plan $\bar{\sigma}$: les droites m_1, m_2 et m_3 passant par le point N $(a; b)$



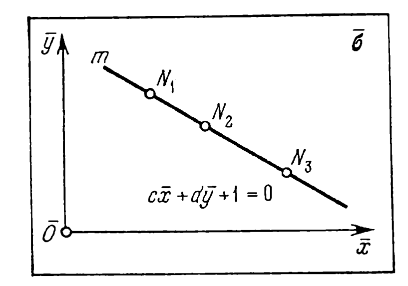
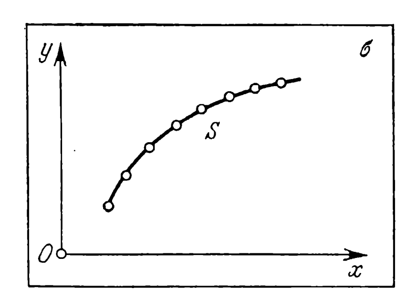


Fig. 94. Les droites n_1, n_2 et n_3 du plan σ passant par le point M $(c; d)$ et leurs images du plan $\bar{\sigma}$: les points N_1, N_2 et N_3 situés sur la droite m: $c\bar{x} + d\bar{y} + 1 = 0$



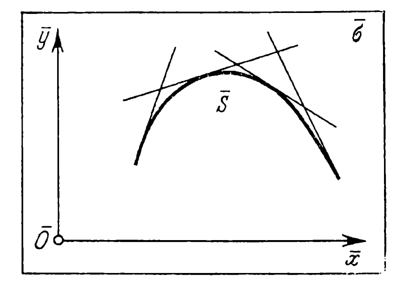
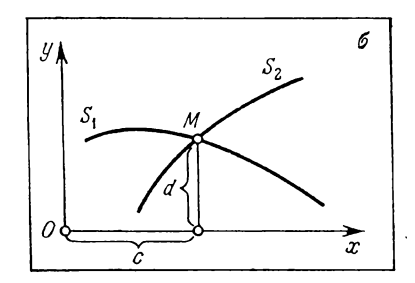


Fig. 95. La courbe S du plan σ considérée comme un ensemble de points et son image sur le plan $\bar{\sigma}$: la courbe $\bar{S}$ envisagée comme un ensemble de ses tangentes

il n'est associé aucun point N. On n'aura une correspondance totale en géométrie projective qu'après adjonction de la *droite de l'infini* et des *points à l'infini* (cf. 7.3).

La transformation des points, droites et courbes du plan σ en droites, points et courbes du plan $\bar{\sigma}$ est dite *corrélative.*

Si dans le plan σ on fait subir une transformation corrélative à un abaque à entrecroisement, il se transforme en un *abaque dual*



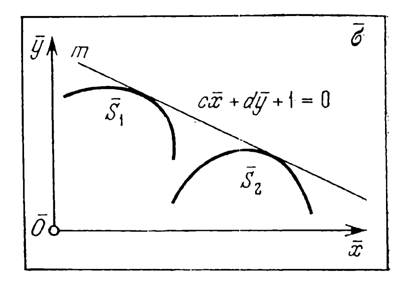


Fig. 96. Les courbes S_1 et S_2 du plan σ passant par le point M $(c\,;\ d)$ et leurs images: les courbes $\bar{S}_1$ et $\bar{S}_2$ tangentes à la droite m: $c\bar{x} + d\bar{y} + 1 = 0$

à clef duale. L'abaque dual peut s'avérer plus souple que l'initial. Voilà en quoi réside le principe de dualité en nomographie.

Utilisons le principe de dualité pour la transformation d'abaques à entrecroisement de la relation (4.1), composés de trois familles de courbes, d'une famille de droites et deux familles de courbes, de deux familles de droites et une famille de courbes. Appliquons par ailleurs le principe de dualité à l'abaque à entrecroisement rectiligne de la relation (4.8).

§ 5.3. Transformation d'un abaque à entrecroisement à trois familles de courbes en un abaque à alignement à trois contacts tangentiels

La clef de l'abaque à entrecroisement à trois familles de courbes u, v et w, représentant l'équation (4.1), est celle de la figure 97, *a*. Une transformation corrélative (fig. 97, *b*) fait correspondre au point d'intersection de ces lignes, i.e. au point résolvant, la droite résolvante, et aux courbes u, v et w les courbes u, v et w, tangentes à la droite résolvante. L'abaque dual sera donc constitué de trois familles de lignes u, v et w (fig. 98).

Le mode d'emploi de l'abaque est le suivant. Soit à déterminer w d'après des valeurs données de u et v. Repérons les lignes u et v ayant ces valeurs pour cotes et appliquons sur elles une règle de

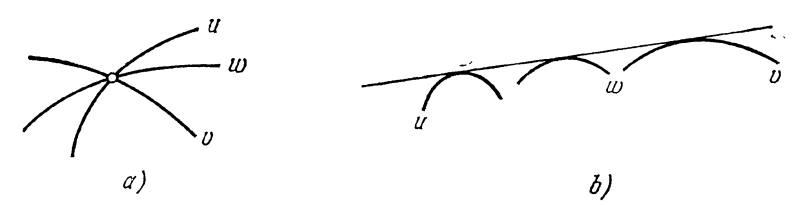


Fig. 97. Transformation d'un abaque à entrecroisement à trois familles curvilignes pour l'équation $F(u, v, w) = 0$ en un abaque dual : *a*) clef de l'abaque à entrecroisement ; *b*) clef de l'abaque dual

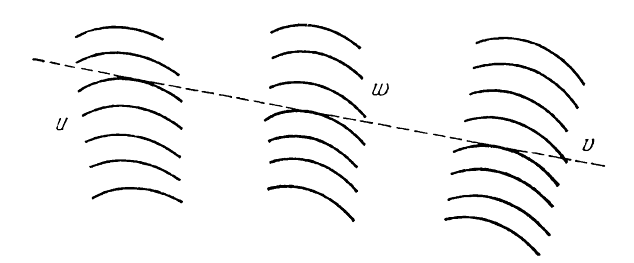


Fig. 98. Schéma d'un abaque à points alignés à trois contacts tangentiels pour l'équation $F(u, v, w) = 0$

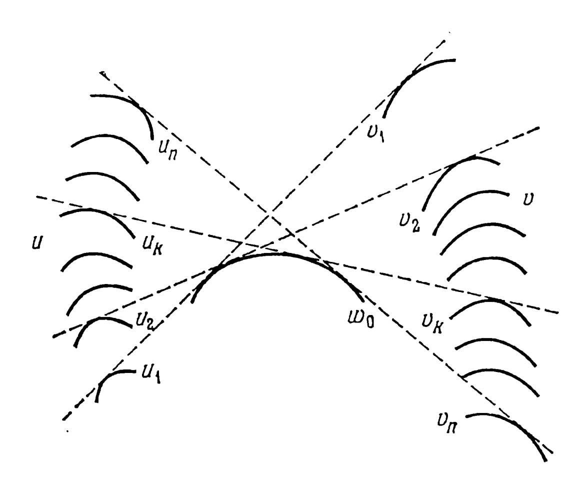


Fig. 99. Construction de la ligne w_0 comme l'enveloppe des tangentes aux lignes u_1 et v_1, u_2 et v_2, . . ., u_k et v_k, . . ., u_n et v_n

telle sorte que cette dernière leur soit tangente. La cote cherchée est celle de la ligne w tangente à la règle.

L'abaque obtenu s'appelle *abaque à alignement à trois contacts tangentiels.*

Si dans l'abaque à entrecroisement, les lignes u, v et w devaient nécessairement être appliquées l'une sur l'autre pour passer par un même point, dans l'abaque dual elles doivent être tangentes à une même droite et leur intersection n'est pas obligatoire.

L'abaque à alignement à trois contacts tangentiels sera commode à l'usage si chaque famille de lignes u, v et w est disposée dans une bande étroite, et les lignes des familles sont convexes ou concaves et non crunodales.

Etant donné que dans l'abaque à entrecroisement initial les familles de courbes u et v étaient arbitraires, dans l'abaque à alignement à trois contacts tangentiels on peut toujours arbitrairement choisir les familles de lignes u et v, et tracer la famille de lignes w sur un exemple en utilisant les familles de lignes u et v et l'équation donnée (4.2). Développons la méthode de construction d'après des exemples pour la ligne $w = w_0$ (tableau 15).

Tableau 15

u	u_1	u_2	...	u_k	...	u_n
v	v_1	v_2	...	v_k	...	v_n

Menons (fig. 99) les tangentes aux lignes u_1 et v_1, . . ., u_k et v_k, . . ., u_n et v_n. Ces tangentes définissent la courbe cherchée w_0, i.e. l'enveloppe de la famille de droites construites. On trace de façon analogue les autres lignes w.

On remarquera que l'abaque à alignement à trois contacts tangentiels peut composer un abaque à alignement à trois champs binaires (fig. 61) lorsque, dans ce dernier, la droite résolvante est tangente à une famille de lignes dans chaque champ binaire. Si ceci a lieu, on dit que la relation nomographique possède un *extrémum sur les trois variables* [58].

Supposons par exemple que dans l'abaque à alignement représentant la relation

$$\frac{f_{34}(b, v) - f_{12}(a, u)}{g_{34}(b, v) - g_{12}(a, u)} = \frac{f_{56}(w, t) - f_{12}(a, u)}{g_{56}(w, t) - g_{12}(a, u)},$$

où t est fonction des trois variables u, v et w et des deux paramètres a et b

$$t = F(u, v, w, a, b), \tag{5.2}$$

la droite résolvante est susceptible d'être tangente aux lignes a, b et t en des points compris dans les intervalles de variation des variables et des paramètres (cf. fig. 100). Cela signifie que la fonction (5.2) possède, relativement aux trois variables, un extrémum dépendant des deux paramètres. Désignons par t^* l'extrémum de t et par u^*, v^* et w^* les valeurs des arguments u, v et w qui réalisent cet extrémum. Les valeurs u^*, v^*, w^* et t^* peuvent être repérées sur l'abaque par une seule application de la règle. A cet effet il faut appliquer

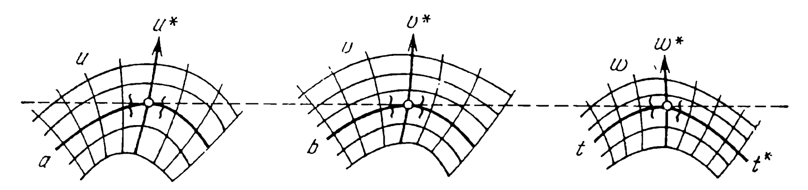


Fig. 100. Schéma d'un abaque à points alignés à trois champs binaires dans lequel la droite de résolution est susceptible d'être tangente aux lignes des familles a, b et t

la règle sur l'abaque de telle sorte qu'elle soit tangente aux lignes données a et b. La valeur t^* sera donnée par la cote de la ligne de la famille t tangente à la règle. Les valeurs u^*, v^* et w^* sont données par les cotes des lignes u, v et w passant par les trois points de tangence. On définit en même temps les domaines des valeurs de u, v et w pour lesquelles les valeurs de t sont proches de t^*. Les frontières de ces domaines sont représentées par des lignes ondulées sur la figure 100.

Ceci suggère une méthode nomographique de calcul de l'extrémum d'une fonction à plusieurs variables et paramètres. Il suffit pour cela de représenter cette relation par un abaque à alignement. En s'en servant comme d'un abaque à contacts tangentiels, on obtient la possibilité de résoudre très facilement des problèmes d'extrémum et de procéder à des recherches. On n'effectue donc aucune dérivation en résolvant les problèmes d'extrémum par la méthode nomographique. Cette méthode a trouvé actuellement d'intéressantes applications pratiques [59, 60, 61]. Dans le § 6.11 on a inclus un abaque (fig. 140) emprunté à l'article [59]. Le problème d'extrémum y est résolu par une seule application de la règle.

§ 5.4. Transformation des abaques à entrecroisement constitués de familles de droites et de courbes en abaques à alignement à contacts mixtes

Abaque constitué d'une famille de droites et deux familles de courbes. Supposons que dans l'abaque à entrecroisement de l'équation (4.1) seule la famille u est une famille de droites. La clef est

celle de la figure 101, *a*. Une transformation corrélative fait correspondre au point d'intersection de la droite *u* et des lignes *v* et *w*, i.e. au point résolvant, la droite résolvante, à la droite *u* le point situé sur la droite résolvante, aux lignes *v* et *w* les lignes *v* et *w*

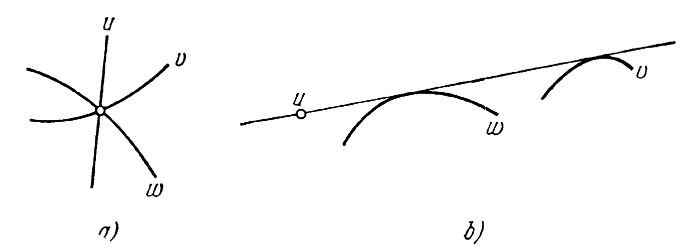


Fig. 101. Transformation d'un abaque à entrecroisement à une famille de droites et deux familles de courbes pour l'équation $F(u, v, w) = 0$ en un abaque dual: *a*) clef de l'abaque à entrecroisement; *b*) clef de l'abaque dual

tangentes à la droite résolvante (fig. 101, *b*). En définitive on obtient un abaque constitué de l'échelle *u* et des deux familles de lignes *v* et *w* (fig. 102).

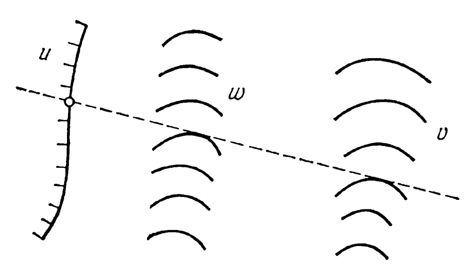


Fig. 102. Schéma d'un abaque à points alignés à un contact ponctuel et deux contacts tangentiels pour l'équation $F(u, v, w) = 0$

Le mode d'emploi de cet abaque est le suivant. Soit à déterminer *w* d'après des valeurs données de *u* et *v*. Appliquons la règle au point donné de l'échelle *u* de telle sorte qu'elle soit tangente à la ligne donnée *v*. La cote de la ligne *w* tangente à la règle donnera la réponse *w*. L'abaque obtenu s'appelle *abaque à alignement à un contact ponctuel et deux contacts tangentiels*. Pour le construire on peut se donner de façon arbitraire l'échelle *u* et la famille de lignes *v*. La famille de lignes *w* peut être tracée comme dans le cas précédent d'après des exemples à l'aide de l'équation (4.2).

Abaque constitué de deux familles de droites et une famille de courbes. Supposons que dans l'abaque à entrecroisement représentant la relation (4.1), les familles *u* et *v* sont des familles de droites et la famille *w* une famille de courbes. La clef de l'abaque est représentée alors sur la figure 103, *a*. Une transformation corrélative fait correspondre au point de rencontre des droites *u* et *v* et de la courbe *w*, i.e. au point résolvant, la droite résolvante, aux droites

u et v les points u et v de la droite résolvante, à la ligne w la courbe w tangente à la droite résolvante (fig. 103, b). En définitive on obtient

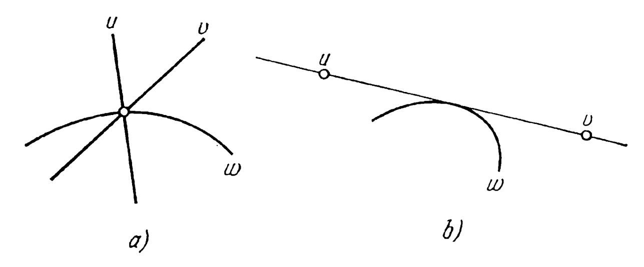


Fig. 103. Transformation d'un abaque à entrecroisement à deux familles de droites et une famille de courbes pour l'équation $F(u, v, w) = 0$ en un abaque dual: a) clef de l'abaque à entrecroisement; b) clef de l'abaque dual

un abaque composé de deux échelles u et v et de la famille de lignes w (fig. 104).

Pour déterminer w d'après les valeurs données de u et v, appliquons la règle aux points donnés des échelles u et v de l'abaque. La cote de la ligne w tangente à la règle nous donne la réponse w. L'abaque obtenu est un *abaque à points alignés à deux contacts ponctuels et un contact tangentiel.* Pour le construire on peut se donner de façon arbitraire les deux échelles u et v et tracer la famille de lignes w d'après des exemples à l'aide de l'équation (4.2).

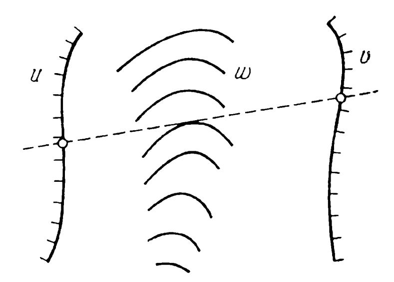


Fig. 104. Schéma d'un abaque à points alignés à deux contacts ponctuels et un contact tangentiel pour l'équation $F(u, v, w) = 0$

Les abaques des figures 102 et 104 présentent des contacts ponctuels et des contacts tangentiels. Ils sont dits *abaques à points alignés à contacts mixtes.*

Exemple 27. Construire un abaque à un contact tangentiel et deux contacts ponctuels pour la formule (4.18)

$$C = \frac{1}{n} R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)},$$

représentée précédemment par un abaque cartésien (fig. 84).

Les intervalles de variation des variables sont les mêmes que précédemment à la limite supérieure près de variation de R, qui est prise égale à 1.

Soient les équations suivantes des échelles C et R:

échelle C:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 1{,}6\,(C - 10);$$

échelle R:

$$\bar{x} = 105, \quad \bar{y} = 150\,(\log R - \log 0{,}1).$$

Traçons les échelles C et R définies par ces équations et construisons ensuite la famille de lignes n à l'aide du tableau 12. Traçons chaque ligne n comme l'enveloppe de la famille de droites résolvantes. L'abaque est représenté sur la figure 105 pour l'exemple numérique : $n = 0{,}017$, $R = 0{,}8$ m ; réponse $C = 57$.

§ 5.5. Transformation d'un abaque à entrecroisement rectiligne en un abaque à alignement à trois contacts ponctuels

La clef de l'abaque à entrecroisement rectiligne de la relation (4.8) est représentée sur la figure 106, *a*. Une transformation corrélative fait correspondre au point d'intersection des droites u, v et w, i.e. au point résolvant, la droite résolvante, aux droites u, v, et w des points de cette dernière (fig. 106, *b*). En définitive on obtient l'abaque à points alignés de la figure 107, composé de trois échelles u, v et w.

Pour déterminer w d'après des valeurs données de u et v, appliquons la règle aux points donnés sur les échelles u et v et lisons la réponse w au point d'intersection de la règle avec l'échelle w. L'abaque obtenu est dit *abaque à échelles à points alignés.* Il possède trois *contacts ponctuels.*

Déterminons les équations des éléments de l'abaque à points alignés de la relation (4.8), en appliquant aux équations des familles de droites (4.5), (4.6) et (4.7) de l'abaque à entrecroisement la transformation corrélative :

échelle u:

$$\bar{x} = f_1, \quad \bar{y} = g_1;$$

échelle v:

$$\bar{x} = f_2, \quad \bar{y} = g_2;$$

échelle w:

$$\bar{x} = f_3, \quad \bar{y} = g_3.$$

Si l'on applique la même transformation aux équations des mêmes familles (4.14), (4.15) et (4.16) contenant les paramètres de transformation, on obtient les équations suivantes :

échelle u:

$$\bar{x}' = \frac{a_{11}f_1 + a_{12}g_1 + a_{13}}{a_{31}f_1 + a_{32}g_1 + a_{33}}, \quad \bar{y}' = \frac{a_{21}f_1 + a_{22}g_1 + a_{23}}{a_{31}f_1 + a_{32}g_1 + a_{33}};$$

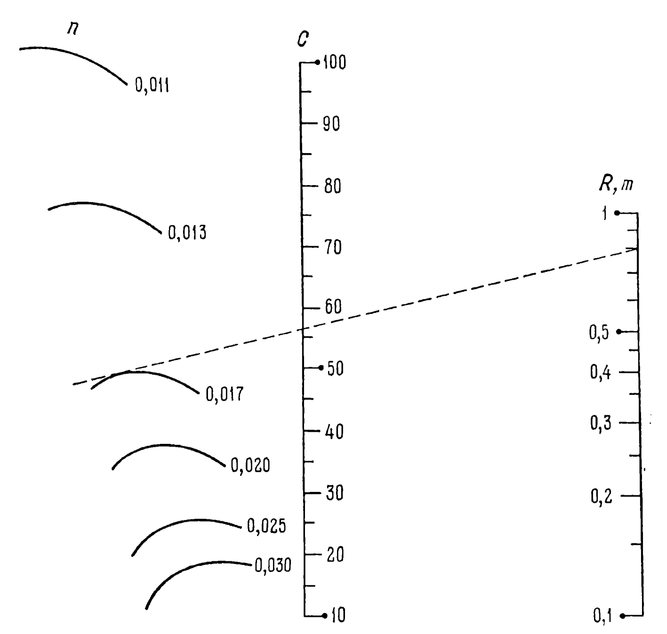


Fig. 105. Abaque à points alignés à un contact tangentiel et deux contacts ponctuels pour la formule $C = \frac{1}{n} R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)}$ dual de l'abaque de la figure 84.

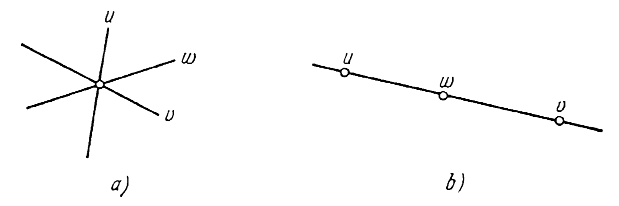


Fig. 106. Transformation a un abaque rectiligne à entrecroisement pour l'équation (4.8) en un abaque dual : *a*) clef de l'abaque à entrecroisement ; *b*) clef de l'abaque dual

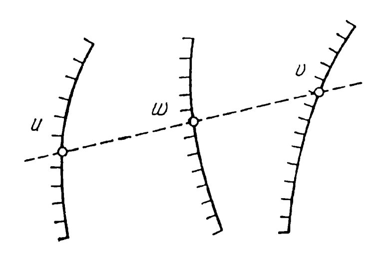


Fig. 107. Schéma d un abaque à échelles à points alignés **pour** l'équation (4.8)

échelle v:

$$\bar{x}' = \frac{a_{11}f_2 + a_{12}g_2 + a_{13}}{a_{31}f_2 + a_{32}g_2 + a_{33}}, \quad \bar{y}' = \frac{a_{21}f_2 + a_{22}g_2 + a_{23}}{a_{31}f_2 + a_{32}g_2 + a_{33}};$$

échelle w:

$$\bar{x}' = \frac{a_{11}f_3 + a_{12}g_3 + a_{13}}{a_{31}f_3 + a_{32}g_3 + a_{33}}, \quad \bar{y}' = \frac{a_{21}f_3 + a_{22}g_3 + a_{23}}{a_{31}f_3 + a_{32}g_3 + a_{33}}.$$

La projection de l'abaque à points alignés implique comme dans le cas de l'abaque à entrecroisement rectiligne le choix de valeurs des paramètres de transformation telles que cet abaque soit commode à l'usage.

Des équations des éléments de l'abaque avant et après l'introduction des paramètres de transformation, il vient que les nouvelles coordonnées $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ sont reliées aux anciennes, $\bar{x}$, $\bar{y}$, par les relations homographiques

$$\bar{x}' = \frac{a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}}{a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}}, \quad \bar{y}' = \frac{a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23}}{a_{31}\bar{x} + a_{32}\bar{y} + a_{33}}. \tag{5.3}$$

Les relations (5.3) sont des formules de transformation projective connues en géométrie projective. L'application de ces formules et de leurs cas particuliers pour la transformation d'abaques à points alignés fait l'objet du chapitre 7.

On remarquera que l'abaque à points alignés de la figure 107 est un cas particulier de l'abaque plus général à points alignés à trois champs binaires de la figure 61, dans le cas où les champs binaires dégénèrent en échelles.

§ 5.6. Transformation d'un abaque cartésien rectiligne en un abaque à points alignés à échelles rectilignes concourantes et à une échelle curviligne

Nous avons vu précédemment qu'un abaque cartésien rectiligne était susceptible de représenter une relation de la forme (4.22), les équations des trois familles de droites u, v et w étant définies par les relations (4.19), (4.20) et (4.21). Le dual de l'abaque cartésien sera composé d'échelles rectilignes u et v et d'une échelle curviligne w, liées par un simple alignement. Pour trouver les équations des échelles, réduisons les équations des trois familles de droites (4.19),

(4.20) et (4.21) à la forme standard (5.1). On obtient

$$\left(-\frac{1}{f_1}\right)x+0\cdot y+1=0,$$

$$0\cdot x+\left(-\frac{1}{f_2}\right)y+1=0,$$

$$\frac{f_3}{h_3}x+\frac{g_3}{h_3}y+1=0.$$

D'où l'on déduit les équations des échelles de l'abaque dual:

échelle u:

$$\bar{x}=-1/f_1,\quad \bar{y}=0;$$

échelle v:

$$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=-1/f_2;$$

échelle w:

$$\bar{x}=f_3/h_3,\quad \bar{y}=g_3/h_3.$$

Le schéma de l'abaque correspondant à ces équations est représenté

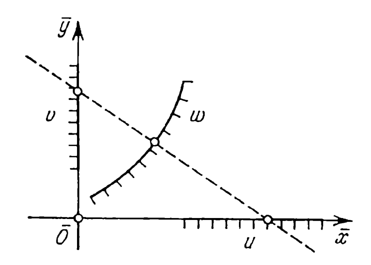


Fig. 108. Schéma d'un abaque à points alignés à deux échelles rectilignes perpendiculaires et une échelle curviligne pour l'équation $f_1f_3+f_2g_3+h_3=0$, dual de l'abaque cartésien rectiligne de la figure 85

sur la figure 108. Les échelles rectilignes u et v sont orthogonales.

Si l'on écrit la forme de Cauchy (4.22)

$$\frac{F_3}{F_1}+\frac{G_3}{F_2}=1, \tag{5.4}$$

les équations des échelles de l'abaque deviennent simplement:

échelle u:

$$\bar{x}=F_1,\quad \bar{y}=0;$$

échelle v:

$$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=F_2;$$

échelle w:

$$\bar{x}=F_3,\quad \bar{y}=G_3.$$

Elles se déduisent des équations précédentes par substitution des fonctions

$$f_1 = -\frac{1}{F_1}, \quad f_2 = -\frac{1}{F_2}, \quad f_3 = F_3, \quad g_3 = G_3, \quad h_3 = 1.$$

Introduisons dans l'équation (5.4) les paramètres de transformation m et n comme nous l'avons fait pour la forme (3.9):

$$\frac{mF_3}{mF_1} + \frac{nG_3}{nF_2} = 1.$$

L'équation obtenue rentre de nouveau dans la forme (5.4). Les nouvelles équations des éléments de l'abaque s'écriront:

échelle u:

$$\bar{x} = mF_1, \quad \bar{y} = 0; \tag{5.5}$$

échelle v:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = nF_2; \tag{5.6}$$

échelle w:

$$\bar{x} = mF_3, \quad \bar{y} = nG_3. \tag{5.7}$$

La présence des paramètres m et n dans les équations (5.5), (5.6) et (5.7) permet de construire des échelles u et v à modules différents dans l'abaque de la figure 108.

A signaler que parfois on a intérêt à se servir d'un système de coordonnées obliques pour construire un abaque cartésien rectiligne et son dual (fig. 108).

§ 5.7. Transformation d'un abaque cartésien rectiligne en un abaque à points alignés à deux échelles parallèles et une échelle curviligne

Commençons par transformer l'équation (4.22). Ajoutons puis retranchons le produit f_1g_3 au premier membre de l'équation (4.22)

$$(f_2g_3 - f_1g_3) + (f_1f_3 + f_1g_3) + h_3 = 0$$

ou

$$g_3(f_2 - f_1) = -h_3 - f_1(f_3 + g_3).$$

D'où

$$f_2 - f_1 = \frac{-h_3 - f_1(f_3 + g_3)}{g_3}$$

ou

$$\frac{1}{f_2 - f_1} = \frac{g_3}{-h_3 - f_1(f_3 + g_3)}.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur du second membre par $f_3 + g_3$, on aura

$$\frac{1}{f_2 - f_1} = \frac{g_3/(f_3 + g_3)}{-h_3/(f_3 + g_3) - f_1}.$$

Multiplions les deux membres par le paramètre H

$$\frac{H-0}{f_2-f_1}=\frac{Hg_3/(f_3+g_3)-0}{-h_3/(f_3+g_3)-f_1}. \qquad (5.8)$$

L'équation (5.8) est de la forme (4.11). D'où il vient les équations des échelles de l'abaque:

échelle u:

$$\bar{x}=0, \quad \bar{y}=f_1;$$

échelle v:

$$\bar{x}=H, \quad \bar{y}=f_2;$$

échelle w:

$$\bar{x}=H\frac{g_3}{f_3+g_3}, \qquad \bar{y}=-\frac{h_3}{f_3+g_3}.$$

L'abaque correspondant à ces équations est représenté sur la figure 109. Les échelles rectilignes u et v sont parallèles.

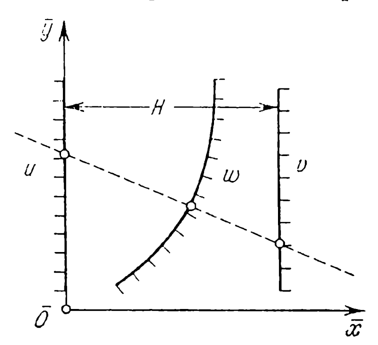


Fig. 109. Schéma d'un abaque à points alignés à deux échelles parallèles et une échelle curviligne pour l'équation $f_1f_3+f_2g_3+h_3=0$, dual de l'abaque cartésien rectiligne de la figure 85

On peut encore introduire quatre paramètres m, n, a et b dans les équations des éléments de l'abaque. A cet effet transformons l'équation (4.22) comme nous l'avons fait en construisant pour elle un abaque cartésien rectiligne, plus exactement

$$[m(f_1-a)]\left(\frac{f_3}{m}\right)+[n(f_2-b)]\left(\frac{g_3}{n}\right)+(af_3+bg_3+h_3)=0.$$

Les nouvelles équations des échelles s'écrivent:

échelle u:

$$\bar{x}=0, \quad \bar{y}=m(f_1-a);$$

échelle v:

$$\bar{x}=H, \quad \bar{y}=n(f_2-b);$$

échelle w:

$$\bar{x}=\frac{Hmg_3}{nf_3+mg_3}, \quad \bar{y}=\frac{-mn\,(af_3+bg_3+h_3)}{nf_3+mg_3}.$$

Ecrivons dans un même tableau (tableau 16) les équations des familles de droites u et v de l'abaque cartésien rectililigne de la figure 85, et les équations des échelles parallèles u et v de l'abaque à points alignés de la figure 109.

Tableau 16

Equations des éléments de l'abaque	
figure 85	figure 109
droites u: $x=m\,(f_1-a)$	échelle u: $\bar{x}=0,\ \bar{y}=m\,(f_1-a)$
droites v: $y=n\,(f_2-b)$	échelle v: $\bar{x}=H,\ \bar{y}=n\,(f_2-b)$

On constate à l'examen du tableau 16 que les échelles déterminées par les familles de droites parallèles u et v sur les axes de coordonnées de l'abaque cartésien sont identiques aux échelles portées par les droites parallèles de l'abaque à échelles. Ceci suggère une méthode pratique utile de transformation d'un abaque cartésien rectiligne en un abaque à points alignés à deux échelles parallèles et une échelle curviligne.

Traçons à une distance H l'une de l'autre deux parallèles qui figureront les supports des échelles u et v. Copions ces échelles sur les échelles u et v de l'abaque à entrecroisement, formées par l'intersection des droites parallèles u et v avec les axes de coordonnées.

La disposition des échelles u et v sur les droites parallèles de même que leurs directions sont arbitraires. Par ailleurs il est possible de modifier la graduation des échelles u et v retirées de l'abaque à entrecroisement, grâce aux paramètres m, n, a, b et H. Une fois qu'on a tracé les échelles parallèles u et v, on peut construire l'échelle curviligne w par la méthode des intersections, en se servant soit de l'abaque à entrecroisement de l'équation (4.22) si celui-ci existe déjà, soit de l'équation elle-même.

Construisons par la méthode des intersections un point quelconque w_0 de l'échelle w en supposant que les échelles parallèles u et v ont déjà été tracées par la méthode décrite plus haut. Prenons deux valeurs quelconques u_1 et u_2 et à l'aide de la droite w_0 trouvons v_1 et v_2 sur l'abaque à entrecroisement (fig. 110).

Ces valeurs peuvent être définies par le calcul. Supposons que l'équation (4.22) s'explicite en v, i.e.

$$v = \Phi(u, w).$$

En portant la valeur $w = w_0$ et en posant $u = u_1$, $u = u_2$, il vient

$$v_1 = \Phi(u_1, w_0), \quad v_2 = \Phi(u_2, w_0).$$

Repérons les points de cotes u_1 et v_1, u_2 et v_2 sur les échelles parallèles u et v et unissons-les par des droites (fig. 111). Le point

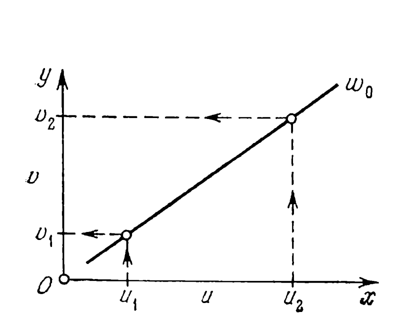


Fig. 110. Détermination des valeurs correspondantes u_1 et v_1, u_2 et v_2 pour la droite w_0 dans un abaque cartésien rectiligne

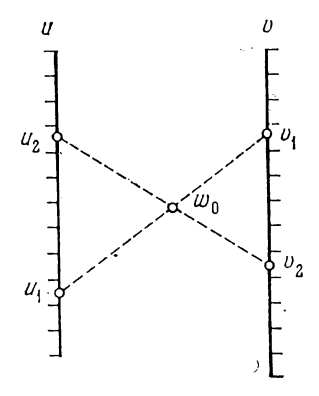


Fig. 111. Construction du point w_0 par la méthode des intersections dans un abaque à points alignés à échelles u et v parallèles

de rencontre de ces droites fait connaître le point cherché de cote w_0 de l'échelle w. Point par point on construirait l'échelle w.

La projection de l'abaque implique la détermination des modules des échelles u et v, leur sens, la disposition et l'écartement des échelles.

§ 5.8. Abaque cartésien rectiligne approché et sa transformation en un abaque dual

Supposons que l'abaque cartésien de la relation (4.2)

$$v = \Phi(u, w),$$

tracé dans un réseau orthogonal (u, v) défini par les équations

$$x = m[f_1(u) - a], \quad y = n[f_2(v) - b],$$

est proche d'un abaque rectiligne sur les intervalles donnés de variation des variables $(u_1 \leqslant u \leqslant u_2,\ w_1 \leqslant w \leqslant w_2)$. L'abaque

cartésien est représenté sur la figure 112. En remplaçant chaque courbe w par une droite w, on obtient un *abaque rectiligne approché.*

L'erreur entraînée par cette substitution se calcule aisément par comparaison de chaque courbe avec la droite qui l'approche.

Si la famille de droites parallèles v est régulière ou logarithmique et les lignes w sont disposées d'un côté des cordes joignant leurs

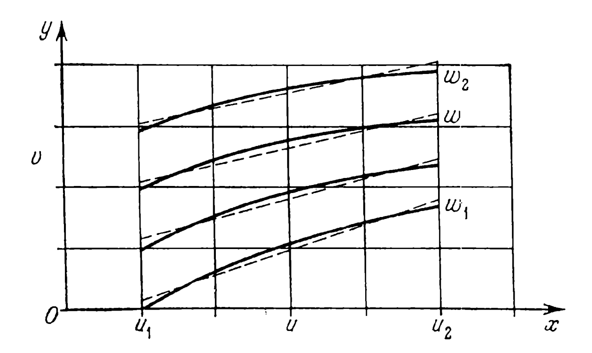


Fig. 112. Substitution approchée aux lignes w de droites dans un abaque cartésien de la relation $w = F(u, v)$

extrémités, on peut à l'aide de la méthode décrite dans le § 3.7 tracer les droites qui les approchent de telle sorte que l'erreur absolue ou relative de l'approximation soit minimale. Pour cela il faut joindre les extrémités de chaque ligne w par une corde, tracer une tangente à cette courbe parallèlement à la corde et ensuite une droite parallèle à la corde et la tangente à égale distance entre ces dernières. Une fois toutes les courbes remplacées par des droites, on peut calculer l'erreur maximale commise. Supposons qu'elle soit admissible.

On peut ensuite transformer l'abaque cartésien rectiligne en un abaque à points alignés à échelles u et v parallèles et échelle w curviligne à l'aide de la méthode graphique décrite plus haut.

La méthode de construction de l'abaque à échelles approché de la relation (4.2) repose donc sur la construction et l'analyse d'un abaque cartésien de cette relation. Après avoir remplacé les courbes w par des droites, on calcule l'erreur maximale d'approximation et on construit l'abaque à échelles approché à l'aide du principe de dualité.

Exemple 28. Tracer un abaque à échelles approché à points alignés pour la détermination de C par la formule (4.18)

$$C = \frac{1}{n} R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}\,(\sqrt{n}-0,1)},$$

R varie entre 0,1 et 3 m pour les valeurs fixes suivantes de n : 0,011 ; 0,013; 0,017; 0,020; 0,025 et 0,030. Au § 4.3 on a construit pour cette formule un abaque cartésien (fig. 84) dans lequel la famille

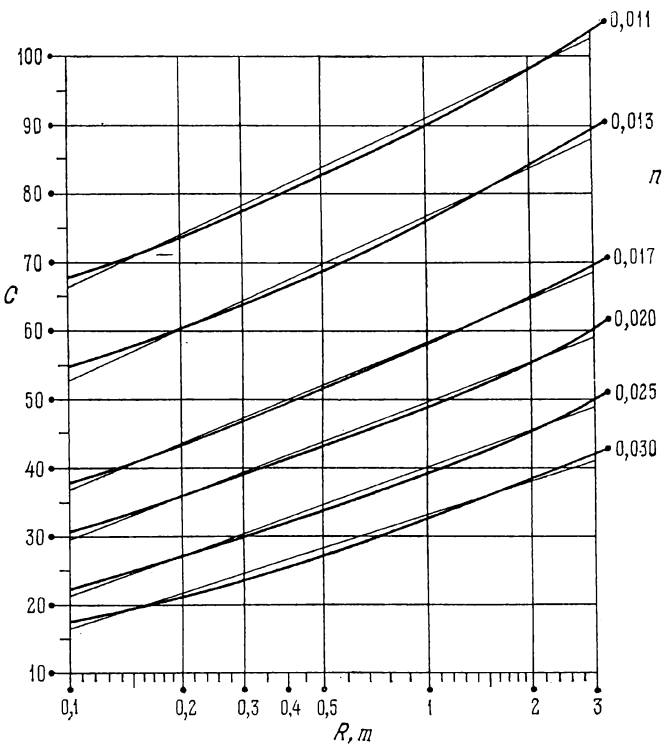


Fig. 113. Substitution approchée aux lignes n de droites dans l'abaque cartésien de la figure 84 pour la formule $C = \frac{1}{n} R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)}$

de lignes n a approché une famille de droites. Le réseau rectangulaire (C, R) a été défini par les équations :

$$x = 100\,(\log R - 0,1), \quad y = 2\,(C - 10).$$

En remplaçant la famille de lignes n par des droites comme nous l'avons décrit plus haut, on obtient un abaque à entrecroisement rectiligne approché (fig. 113).

La plus grande erreur absolue d'approximation de C, qui est égale à 1, correspond à $n = 0,013$. Donc l'erreur absolue sur C ne dépasse pas l'unité.

L'abaque est représenté sur la figure (114). Les échelles C et R sont définies par les équations:

échelle C:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 2\,(C - 15);$$

échelle R:

$$\bar{x} = 105, \quad \bar{y} = 125\,(\log R - 0{,}1).$$

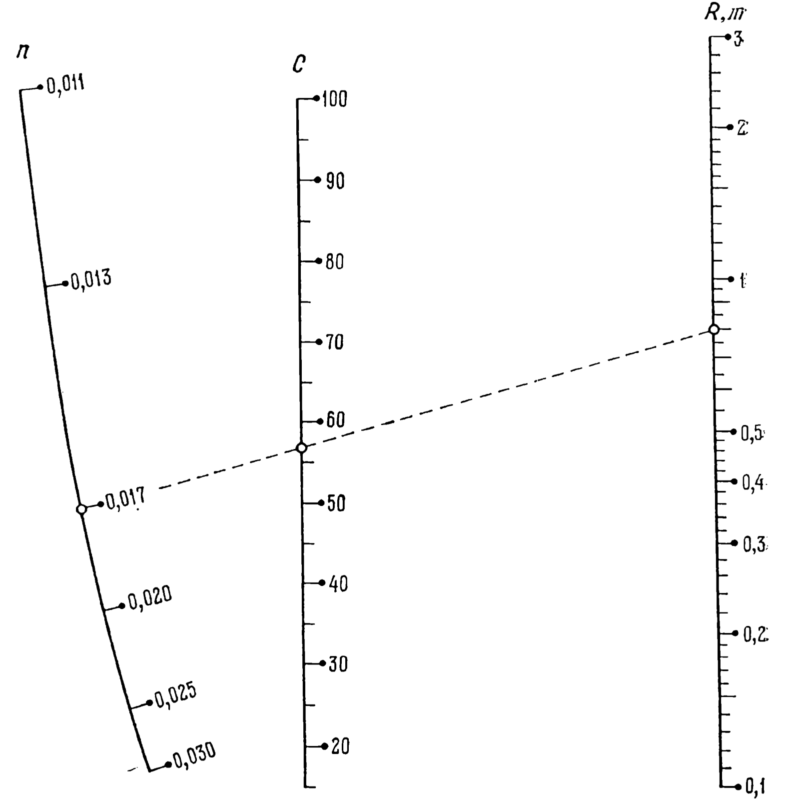


Fig. 114. Abaque approché à points alignés pour la détermination de C avec la formule $C = \frac{1}{n} R^{2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0,1)}$, dual de l'abaque cartésien rectiligne approché de la figure 113

Les points de l'échelle n ont été construits par la méthode des intersections au moyen du tableau 17 dressé à l'aide de l'abaque à en-

trecroisement rectiligne approché de la figure 113. Le tableau 17 renferme également la valeur de l'erreur maximale Δ^* pour chaque valeur de n.

Tableau 17

n	C		Δ^*	n	C		Δ^*
	$R = 0,1$ m	$R = 3$ m			$R = 0,1$ m	$R = 3$ m	
0,011	66,5	103,7	0,7	0,020	29,9	59,6	0,7
0,013	53,3	88,4	1	0,025	21,7	48,6	0,7
0,017	37,4	69,1	0,7	0,030	16,6	41,2	0,7

L'abaque a été construit pour l'exemple numérique: $n = 0{,}017$, $R = 0{,}8$ m; réponse $C = 57$.

Exemple 29. Soient donnés [62] trois abaques à entrecroisement (fig. 115, 116 et 117) pour la détermination de w et t d'après

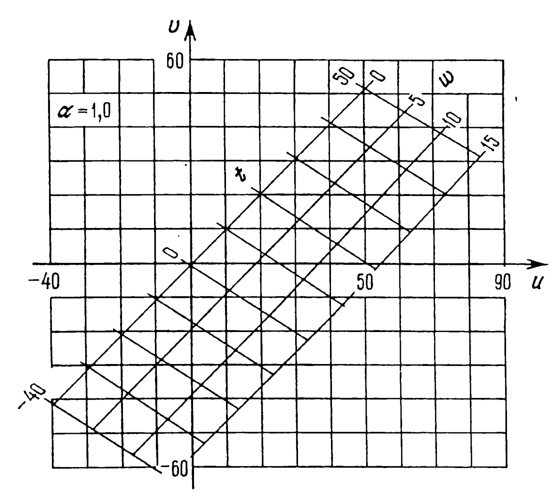


Fig. 115. Abaque à entrecroisement liant u, v, w et t pour $\alpha = 1$.

des valeurs données de u et v, tracés dans des réseaux métriques équivalents pour les trois valeurs fixes suivantes de α: 1; 1,5; 2. Dans ces trois abaques, les familles de lignes w et t sont proches de droites. On demande de transformer ces trois abaques en un abaque à points alignés en remplaçant préalablement les lignes w et t par des droites.

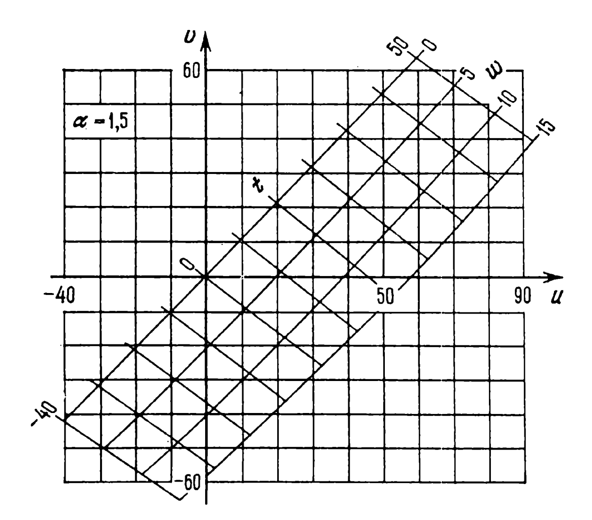


Fig. 116. Abaque à entrecroisement liant u, v, w et t pour $\alpha = 1,5$

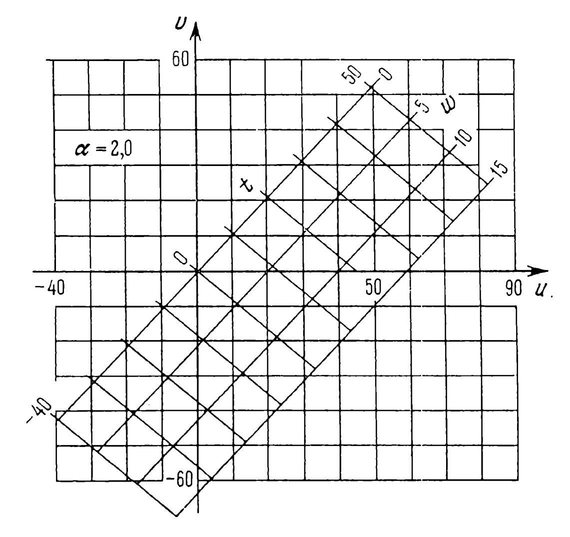


Fig. 117. Abaque à entrecroisement liant u, v, w et t pour $\alpha = 2$

On remarquera que si la détermination de w et t d'après des valeurs données de u et v et une des valeurs suivantes de α: 1 ; 1,5 ; 2, à l'aide des abaques cités, ne présente pas de grosses difficultés

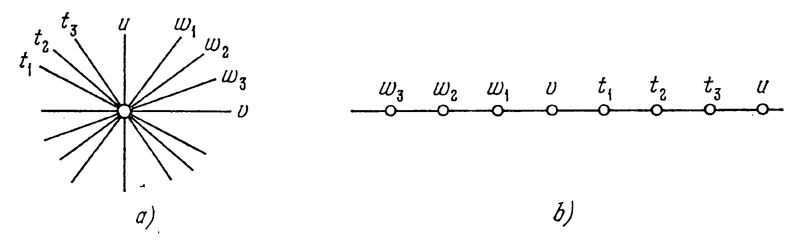


Fig. 118. Transformation des abaques des figures 115, 116 et 117 après leur superposition et substitution approchée aux lignes w et t de droites en un abaque dual : *a*) clef de l'abaque rectiligne à entrecroisemant approché ; *b*) clef de l'abaque approché dual

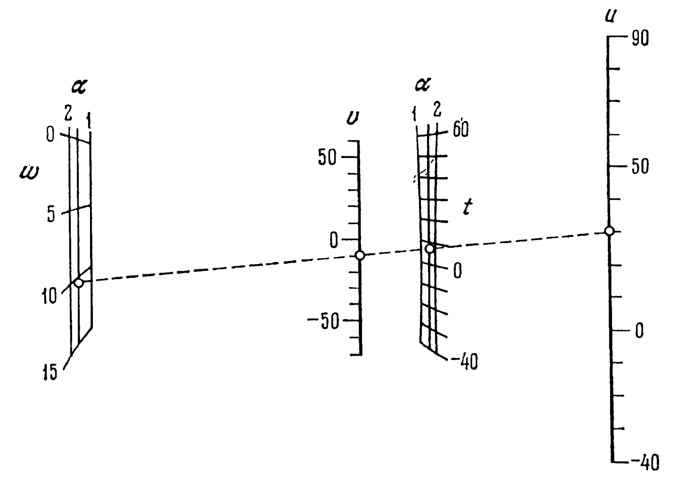


Fig. 119. Abaque approché a points alignés dual des abaques rectilignes à entrecroisement approchés des figures 115, 116 et 117

la résolution du même problème pour des valeurs de α comprises entre 1 et 2 et distinctes de 1 ; 1,5 et 2 demande une interpolation complexe entre les abaques.

Remplaçons les lignes w et t par des droites dans les trois abaques. Désignons les droites w et t par w_1 et t_1 dans l'abaque de la figure 115, par w_2 et t_2 dans l'abaque de la figure 116 et par w_3 et t_3 dans l'abaque de la figure 117 et superposons mentalement les abaques de telle sorte que les réseaux (u, v) coïncident. On obtient

un abaque à entrecroisement rectiligne par chaque point duquel il passe huit droites cotées, plus exactement u, v, w_1, w_2, w_3, t_1, t_2, t_3.

Utilisons le principe de dualité pour transformer cet abaque en un abaque à points alignés. La figure 118, *a* représente la clef de l'abaque à entrecroisement rectiligne, la figure 118, *b* celle de l'abaque dual. Une transformation corrélative fait correspondre au point résolvant la droite résolvante et aux huit droites u, v, w_1, w_2, w_3, t_1, t_2 et t_3 des points sur cette dernière. En définitive on obtient un abaque constitué de huit échelles w_1, w_2, w_3, v, t_1, t_2, t_3 et u liées par un simple alignement. Les échelles w_1, w_2 et w_3 et les échelles t_1, t_2 et t_3 peuvent être disposées en champs binaires (α, w) et (α, t).

Traçons l'abaque. Menons les échelles parallèles métriques u et v en prenant soin que le module de l'échelle u soit le double de celui de l'échelle v. Orientons ces échelles dans le même sens. Construisons ensuite les points des champs (α, w) et (α, t) par la méthode des intersections. On obtient l'abaque de la figure 119. Cet abaque correspond à l'exemple numérique: $\alpha = 1{,}5$, $u = 30$, $v = -10$; réponse $w = 10{,}2$ et $t = 7$. L'abaque illustre bien la relation entre u, v, w, t et α. Il permet d'effectuer une interpolation sur α. Le schéma de cet abaque nous montre qu'il existe des combinaisons de valeurs de u et v telles que α n'influe pratiquement pas sur w et t. C'est ainsi que pour $u = 46$ et $v = 41$, on obtient $w = 1{,}8$ et $t = 42$ quel que soit $\alpha \in [1, 2]$.

CHAPITRE 6

MÉTHODE DE CONSTRUCTION DES ABAQUES À POINTS ALIGNÉS

§ 6.1. Déduction de la forme canonique fondamentale représentable par un abaque à points alignés

Nous avons obtenu plus haut des abaques à points alignés à champs binaires en généralisant la droite représentative d'une fonction dans un champ binaire (§ 3.4) moyennant une transformation d'un abaque à entrecroisement (§ 5.1), ainsi que des abaques à échelles par transformation d'abaques à entrecroisement rectilignes en abaques

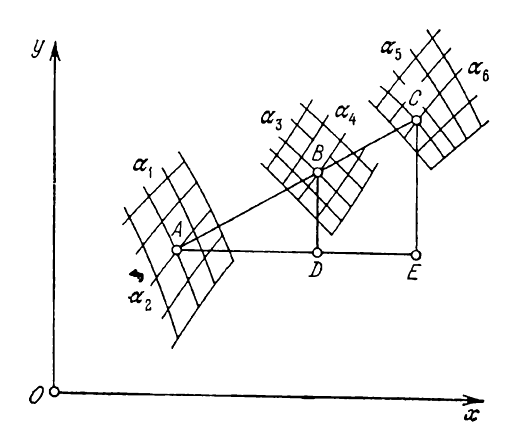


Fig. 120. Construction relative à la déduction de la forme canonique $\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}} = \frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}$, représentée par un abaque à points alignés à trois champs binaires

duaux (§§ 5.5 à 5.8). Pour parachever l'étude de ce problème, considérons maintenant la méthode directe d'obtention d'abaques à points alignés.

Soient donnés dans un système de coordonnées rectangulaires (fig. 120) les champs binaires (α_1, α_2), (α_3, α_4) et (α_5, α_6) définis par les équations:

champ (α_1, α_2):

$$x_{12} = f_{12}, \quad y_{12} = g_{12}; \tag{6.1}$$

champ (α_3, α_4):

$$x_{34} = f_{34}, \quad y_{34} = g_{34}; \tag{6.2}$$

champ (α_5, α_6):

$$x_{56} = f_{56}, \quad y_{56} = g_{56}. \tag{6.3}$$

Convenons du mode d'emploi suivant de l'abaque. Repérons dans les champs binaires (α_1, α_2) et (α_3, α_4) les points A et B correspondants aux valeurs données α_1, α_2 et α_3, α_4. Appliquons la règle sur les points A et B et trouvons son point de rencontre C avec la ligne donnée α_5. La cote de la ligne α_6 passant par C fait connaître la réponse.

Du mode d'emploi de l'abaque il résulte que les points A, B et C sont alignés. Le point A a pour coordonnées x_{12} et y_{12}, le point B, x_{34}, y_{34}, le point C, x_{56} et y_{56}. Menons par le point A une droite parallèle à l'axe Ox et par B et C des parallèles à Oy. La similitude des triangles ABD et ACE donne

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

En portant $AD = x_{34} - x_{12}$, $DB = y_{34} - y_{12}$, $AE = x_{56} - x_{12}$, $EC = y_{56} - y_{12}$ dans l'expression précédente, on obtient

$$\frac{x_{34} - x_{12}}{y_{34} - y_{12}} = \frac{x_{56} - x_{12}}{y_{56} - y_{12}}.$$

En tenant compte des équations (6.1), (6.2) et (6.3), on obtient la forme canonique fondamentale

$$\frac{f_{34} - f_{12}}{g_{34} - g_{12}} = \frac{f_{56} - f_{12}}{g_{56} - g_{12}}, \tag{6.4}$$

qui a été déduite d'une autre façon au § 3.4.

Si l'on admet que les points A, B et C de la figure 120 appartiennent aux échelles u, v et w, on est conduit à la forme

$$\frac{f_2 - f_1}{g_2 - g_1} = \frac{f_3 - f_1}{g_3 - g_1}, \tag{6.5}$$

étudiée au §§ 4.2 et 5.4.

De façon analogue on obtiendrait (cf. § 3.4) un abaque composé de plusieurs champs binaires par un simple alignement pour la résolution du système d'équations

$$\frac{f_{34} - f_{12}}{g_{34} - g_{12}} = \frac{f_{56} - f_{12}}{g_{56} - g_{12}} = \ldots = \frac{f_{n-1,\,n} - f_{12}}{g_{n-1,\,n} - g_{12}}. \tag{6.6}$$

Mettons les équations des éléments des abaques représentant les relations (6.4), (6.5) et (6.6) dans un système de coordonnées rectan-

gulaires xOy sous la forme

$$x = f_i, \quad y = g_i. \tag{6.7}$$

Les équations des éléments des abaques contenant les paramètres de transformation sont définies par les formules (cf. § 4.2 et § 5.4)

$$x = \frac{a_{11}f_i + a_{12}g_i + a_{13}}{a_{31}f_i + a_{32}g_i + a_{33}}, \quad y = \frac{a_{21}f_i + a_{22}g_i + a_{23}}{a_{31}f_i + a_{32}g_i + a_{33}}. \tag{6.8}$$

Dans les équations (6.7) et (6.8), les fonctions f_i et g_i sont celles des formes (6.4), (6.5) et (6.6), munies de leur indice respectif.

La projection des abaques des relations (6.4), (6.5) et (6.6) consiste à choisir dûment les paramètres de transformation.

Les formes (6.4), (6.5) et (6.6) sont les relations les plus générales que l'on puisse représenter par des abaques à points alignés à simple alignement dans les cas où les abaques sont constitués respectivement de trois échelles curvilignes, de trois champs binaires et de plusieurs champs binaires.

On remarquera que la forme (6.4) peut être considérée comme une généralisation de la forme (6.5) et la forme (6.6) comme une généralisation de la forme (6.4) au cas d'un système d'équations.

On a mentionné précédemment que la forme (6.5) pouvait encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.9}$$

La forme (6.4) s'écrit aussi

$$\begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & 1 \\ f_{34} & g_{34} & 1 \\ f_{56} & g_{56} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.10}$$

Si l'on envisage comme un problème à part la représentation de systèmes d'équations par des abaques à points alignés, des deux formes canoniques (6.4) et (6.5) il faut considérer que la première est fondamentale, car la seconde en est un cas particulier.

§ 6.2. Classification des abaques à points alignés

Les abaques à points alignés se divisent en :

a) abaques à échelles et à champs binaires,

b) abaques d'une seule équation et d'un système d'équations,

c) abaques simples (une seule application de règle) et composés (plusieurs applications de règle).

Les abaques à échelles sont constitués uniquement d'échelles, les abaques à champs binaires — de champs binaires qui, dans des cas particuliers, sont susceptibles de dégénérer en échelles ou en familles de lignes. Les abaques à échelles et à champs binaires peuvent représenter aussi bien une équation qu'un système d'équations et peuvent être simples ou composés.

Les abaques d'une seule équation ou d'un système d'équations peuvent être à échelles ou à champs binaires, simples ou composés.

Les abaques simples et composés peuvent être à échelles ou à champs binaires et représenter une équation ou un système d'équations.

Abaques à échelles. L'équation à trois variables la plus générale représentée par un abaque à échelles à simple alignement est de la forme (6.5) ou (6.9) et s'appelle *équation de Soreau.* L'équation complète se rencontre rarement. On a plus souvent affaire à ses cas particuliers:

$$f_1 + f_2 = f_3, \tag{6.11}$$

$$f_1 = f_2 f_3, \tag{6.12}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = f_1 f_2 f_3, \tag{6.13}$$

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0, \tag{6.14}$$

$$f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)\, g_3 + h_3 = 0, \tag{6.15}$$

$$f_3 = \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}. \tag{6.16}$$

Signalons encore une variante de la forme (6.11)

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3} \tag{6.17}$$

et une variante de la forme (6.14)

$$\frac{F_3}{F_1} + \frac{G_3}{F_2} = 1. \tag{6.18}$$

On peut passer de l'une des formes (6.11), (6.12) et (6.13) à l'autre par des transformations transcendantes. Ainsi, en prenant le logarithme de la forme (6.12), on obtient la forme (6.11). On passe de la forme (6.13) à la forme (6.11) par la substitution $\operatorname{tg} \varphi_i = f_i$, $i = 1, 2, 3$.

Les formes (6.11), (6.12) et (6.13) sont des cas particuliers de l'équation

$$Af_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0, \tag{6.19}$$

où A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 et D sont des coefficients numériques. L'équation (6.19) s'appelle *équation complète d'ordre nomographique*

trois. Elle ne contient que les trois fonctions f_1, f_2 et f_3 et est linéaire par rapport à chacune d'elles. Une particularité importante de l'équation (6.19) est qu'elle peut toujours être ramenée à l'une des formes (6.11), (6.12) ou (6.13) [16, 63] par des transformations homographiques sur les fonctions f_1, f_2 et f_3.

De toutes les formes particulières de l'équation (6.19), celle qui présente le plus d'intérêt pratique est

$$w = Auv + Bu + Cv + D, \tag{6.20}$$

elle peut être représentée par un abaque à deux échelles métriques parallèles et une échelle projective oblique.

Les formes (6.14), (6.15) et (6.16) sont respectivement appelées *forme de Cauchy, de Clark, de Soreau.*

Les formes de Cauchy et de Clark sont des cas particuliers de l'équation plus générale

$$(l_0f_1f_2 + l_1f_1 + l_2f_2 + l_3)\,f_3 + (m_0f_1f_2 + m_1f_1 + m_2f_2 + m_3)\,g_3 + \\ + (n_0f_1f_2 + n_1f_1 + n_2f_2 + n_3)\,h_3 = 0, \tag{6.21}$$

où l_0, l_1, l_2, l_3, m_0, m_1, m_2, m_3, n_0, n_1, n_2, n_3 sont des coefficients numériques. Cette équation s'appelle *équation complète d'ordre nomographique quatre.* Elle contient quatre fonctions f_1, f_2, f_3/h_3 et g_3/h_3 et est linéaire par rapport à chacune d'elles. Cette équation peut toujours être ramenée soit à une forme de Cauchy, soit à une forme de Clark [16]. Si en particulier g_3 et h_3 sont des fonctions linéaires de f_3, l'équation (6.21) se transforme en une équation du type (6.19).

Abaques à champs binaires. L'équation à six variables la plus générale, représentable par un abaque à trois champs binaires liés par un simple alignement, est de la forme (6.4) ou (6.10). Les formes canoniques à quatre et cinq variables suivantes sont d'importants cas particuliers de cette relation:

forme de Cauchy à champ

$$f_1f_{34} + f_2g_{34} + h_{34} = 0, \tag{6.22}$$

la variante de la forme de Cauchy à champ

$$\frac{F_{34}}{F_1} + \frac{G_{34}}{F_2} = 1, \tag{6.23}$$

forme de Clark à champ

$$f_1f_2f_{34} + (f_1 + f_2)\,g_{34} + h_{34} = 0, \tag{6.24}$$

forme de Soreau à un seul champ

$$f_4 = \frac{f_1 + f_{23}}{g_1 + g_{23}}, \tag{6.25}$$

forme de Soreau à deux champs

$$f_5 = \frac{f_{12} + f_{34}}{g_{12} + g_{34}}. \tag{6.26}$$

Signalons également la forme

$$(l_0 f_1 f_2 + l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3) f_{34} + (m_0 f_1 f_2 + m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3) g_{34} + \\ + (n_0 f_1 f_2 + n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3) h_{34} = 0, \tag{6.27}$$

qui est une généralisation de la forme (6.21). La forme (6.27) peut toujours être ramenée soit à la forme de Cauchy à champ (6.22) soit à la forme de Clark à champ (6.24).

Un cas particulier important de l'équation (6.27) est la forme

$$t = Auvw + Buv + Cvw + Dwu + Eu + Fv + Gw + H. \tag{6.28}$$

De toutes les formes citées précédemment, celles que l'on rencontre le plus fréquemment sont la forme de Cauchy (6.14) et ses cas particuliers (6.11) et (6.12) ainsi que la forme de Cauchy à champ (6.22). Pour cette raison nous allons nous pencher tout particulièrement sur la représentation nomographique de ces formes.

On remarquera que l'équation complète d'ordre nomographique trois (6.19) et ses cas particuliers (6.11), (6.12) et (6.13) peuvent être représentés par des abaques à échelles rectilignes, des abaques à une échelle rectiligne et deux échelles portées par une section conique et par des abaques à trois échelles curvilignes [16, 24, 64]. Ces abaques se distinguent par leur grand pouvoir d'adaptation puisqu'ils peuvent faire l'objet de transformations aussi bien projectives que non projectives [24]. Mais à des fins pratiques on peut parfaitement se contenter des abaques rectilignes les plus simples auxquels on n'appliquera que des transformations projectives.

Abaques de systèmes d'équations. Le système d'équations le plus général représentable par un abaque à points alignés à simple alignement est de la forme (6.6). Dans la pratique on a souvent affaire à ses cas particuliers suivants:

$$\left.\begin{aligned} f_3(w) &= Af_1(u) + Bf_2(v), \\ f_4(t) &= Cf_1(u) + Df_2(v); \end{aligned}\right\} \tag{6.29}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= a_1 + b_1 u + c_1 v, \\ t &= a_2 + b_2 u + c_2 v; \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= a_1 u^{b_1} v^{c_1}, \\ t &= a_2 u^{b_2} v^{c_2}; \end{aligned}\right\} \tag{6.31}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(u) + f_2(v) &= f_3(w), \\ f_{12}(u, v) &= f_4(t). \end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

Les abaques des systèmes d'équations (6.29), (6.30), (6.31) et (6.32) sont composés d'échelles parallèles (l'abaque du système (6.32) comprend encore une famille de lignes présentant des contacts tangentiels avec la droite résolvante). C'est pourquoi on n'examinera la représentation nomographique de ces systèmes qu'après avoir étudié les abaques à échelles parallèles.

Abaques composés. Les abaques à plusieurs applications de la règle conviennent à la représentation d'une classe assez vaste de relations à plusieurs variables. Signalons les formes les plus courantes représentables par des abaques à échelles simples à double ou triple alignement:

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4, \qquad (6.33)$$

$$f_1 + f_2 = f_3 f_4, \qquad (6.34)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = f_4 f_5, \qquad (6.35)$$

$$f_1 f_2 + g_2 = f_3 f_4. \qquad (6.36)$$

Etudions l'abaque composé d'un abaque à points alignés et d'un abaque à entrecroisement.

§ 6.3. Abaques à points alignés à deux échelles rectilignes et une échelle curviligne

La représentation nomographique des équations (6.18) et (6.14) a été étudiée au §§ 5.6 et 5.7, où l'on a obtenu les équations des éléments des abaques impliquant les paramètres de transformation et développé une méthode pratique de transformation d'un abaque rectiligne cartésien de la relation (6.14) en un abaque à deux échelles parallèles et une échelle curviligne.

Ecrivons les équations des éléments des abaques des relations (6.18) et (6.14) dans le système de coordonnées rectangulaires xOy et citons un exemple détaillé de construction d'un abaque concret.

Cas d'échelles concourantes. Les équations des éléments de l'abaque de la relation (6.18) s'écrivent dans le système de coordonnées xOy:

échelle u:

$$x = mF_1, \quad y = 0;$$

échelle v:

$$x = 0, \quad y = nF_2;$$

échelle w:

$$x = mF_3, \quad y = nG_3.$$

On supposera que les paramètres m et n sont positifs. On sait par ailleurs que la forme de Cauchy (6.18) peut s'écrire

$$\frac{(-F_3)}{(-F_1)}+\frac{G_3}{F_2}=1$$

ou encore

$$\frac{F_3}{F_1}+\frac{(-G_3)}{(-F_2)}=1.$$

On peut tracer l'abaque dans un système de coordonnées oblique. La construction de l'abaque implique le choix de l'angle de coordonnées, des paramètres m et n et des sens des échelles.

Cas d'échelles parallèles. Dans un système de coordonnées rectangulaires xOy, les équations des éléments de l'abaque de la relation (6.14) s'écrivent:

échelle u:

$$x=0, \quad y=m\,(f_1-a);$$

échelle v:

$$x=H, \quad y=n\,(f_2-b);$$

échelle w:

$$x=\frac{Hmg_3}{nf_3+mg_3}, \quad y=\frac{-mn\,(af_3+bg_3+h_3)}{nf_3+mg_3}.$$

On supposera que les paramètres m et n sont positifs. En formant les équations des éléments de l'abaque on ne perdra pas de vue que la forme de Cauchy (6.14) peut encore s'écrire :

$$(-f_1)\,(-f_3)+f_2g_3+h_3=0$$

ou encore

$$f_1f_3+(-f_2)\,(-g_3)+h_3=0.$$

Dans le premier cas c'est le sens de l'échelle u qui varie, dans le second, celui de l'échelle v. On obtiendrait le même résultat en supposant que les paramètres m et n sont des nombres algébriques.

La projection de l'abaque implique le choix des paramètres H, m, n, a, b et des sens des échelles parallèles. Cette projection est simplifiée par le fait que les cinq paramètres admettent une interprétation géométrique suggestive. Le paramètre H représente l'écartement des échelles parallèles, les paramètres m et n les longueurs des échelles u et v, les paramètres a et b la disposition respective des échelles u et v.

Lorsqu'on choisira les paramètres de transformation et le sens des échelles parallèles il faut

1) vérifier si le support de l'échelle curviligne coupe les échelles parallèles, est une ligne monotone ou possède des extrémums;

2) établir laquelle des variables u, v et w est à chercher et si ses limites de variation sont complètes ou incomplètes.

On s'arrange généralement, si cela est possible bien sûr, pour placer l'échelle de résolution entre celles des grandeurs données. Mais dans certains cas (par exemple lorsque les limites de variation de la variable cherchée sont incomplètes) on aura peut-être plus d'intérêt à disposer cette échelle à l'extérieur.

Si l'échelle w ne coupe pas les échelles rectilignes, par un choix convenable de leurs directions on peut toujours la disposer entre les échelles parallèles, puis en se donnant la longueur L de l'abaque déterminer les modules des échelles u et v. Les paramètres a et b peuvent être déduits à partir de la condition que les limites inférieures des échelles u et v sont situées sur l'axe Ox.

Exemple 30. Construisons un abaque à points alignés dont les échelles u et v sont parallèles et l'échelle w curviligne pour l'équation (4.23) [41]

$$uw + v\,(e^w - 1) - we^w = 0,$$

qui a été représentée au § 4.4 par un abaque cartésien rectiligne (cf. fig. 86). Les intervalles de variation sont: $0 \leqslant u \leqslant 3{,}5$; $0 \leqslant \leqslant v \leqslant 6$; $1 \leqslant w \leqslant 6$.

En comparant l'équation (4.23) avec la forme de Cauchy (6.14), on obtient

$$f_1 = u, \quad f_2 = v, \quad f_3 = w, \quad g_3 = e^w - 1, \quad h_3 = -we^w.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

échelle u:

$$x = 0, \quad y = m\,(u - a);$$

échelle v:

$$x = H, \quad y = n\,(v - b);$$

échelle w:

$$x = \frac{Hm\,(e^w - 1)}{nw + m\,(e^w - 1)}, \quad y = \frac{-mn\,[aw + b\,(e^w - 1) - we^w]}{nw + m\,(e^w - 1)}.$$

Posons $a = b = 0$, puisque les limites inférieures de variation de u et v sont nulles. Déterminons les paramètres m et n à partir de la condition $L = 220$ mm. Il vient

$$220 = 3{,}5 \cdot m, \quad 220 = 6 \cdot n.$$

D'où

$$m = \frac{220}{3{,}5} = 62{,}9 \text{ mm}, \quad n = \frac{220}{6} = 36{,}7 \text{ mm}.$$

Posons $m = 65$ mm et $n = 37$ mm. Supposons que $H = 150$ mm. Les équations des échelles s'écrivent alors

échelle u:

$$x = 0, \quad y = 65\,u;$$

échelle v:

$$x = 150, \quad y = 37\,v;$$

échelle w:

$$x = \frac{150 \cdot 65\,(e^w - 1)}{37w + 65\,(e^w - 1)}, \quad y = \frac{65 \cdot 37 w e^w}{37w + 65\,(e^w - 1)}.$$

Fig. 121. Construction de l'échelle w dans un abaque à points alignés pour l'équation $uw + v\,(e^w - 1) - we^w = 0$ par la méthode des intersections

La figure 1 (cf. Introduction page 8) représente l'abaque de ces équations.

On peut tracer facilement l'abaque de la figure 1 sans en calculer les échelles d'après les équations obtenues. En effet les échelles u et v étant métriques on peut les tracer sans calcul. L'échelle curviligne

w peut, quant à elle, être construite par la méthode des intersections. A cet effet résolvons l'équation (4.23) par rapport à la variable v. On obtient

$$v = \frac{w\,(e^{w} - u)}{e^{w} - 1}.$$

Dressons le tableau 18 à l'aide de cette formule.

Tableau 18

w	v		w	v	
	$u = 1$	$u = 2$		$u = 1$	$u = 2$
1	1	0,42	4	4	3,93
2	2	1,69	5	5	4,97
3	3	2,84	6	6	5,99

L'abaque se construit ainsi. Traçons des échelles u et v parallèles, métriques et de même sens, de modules 65 et 37 mm respectivement. Disposons les échelles symétriquement à une distance de 150 mm l'une de l'autre. Utilisons le tableau 18 pour construire par la méthode des intersections les points de l'échelle w cotés 1 ; 2 ; ...; 6. Ce sont les points d'intersection de deux faisceaux de droites, dont les centres sont les points cotés 1 et 2 de l'échelle u. Ainsi le point coté 3 de l'échelle w est le point de rencontre des droites unissant les points des échelles u et v cotés 1 et 3, 2 et 2,84. La figure 121 représente l'esquisse de l'abaque ainsi construit.

§ 6.4. Abaque à points alignés à échelles rectilignes concourantes

Si dans la forme (6.18), on pose $G_3 = F_3$, on obtient la formule (6.17)

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}.$$

Les équations des éléments de son abaque s'écrivent :

échelle u :

$$x = mF_1, \quad y = 0;$$

échelle v :

$$x = 0, \quad y = nF_2;$$

échelle w :

$$x = mF_3, \quad y = nF_3.$$

Des équations de l'échelle w il résulte que son support est la droite passant par l'origine des coordonnées. Les échelles u et v passent

également par ce point. L'abaque est donc constitué de trois échelles rectilignes concourantes.

La méthode de construction de l'abaque de la forme (6.17) est analogue à celle de la forme (6.18).

Exemple 31. Construisons un abaque pour la formule

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$$

sur l'intervalle [0, 10] de variation de u et v.

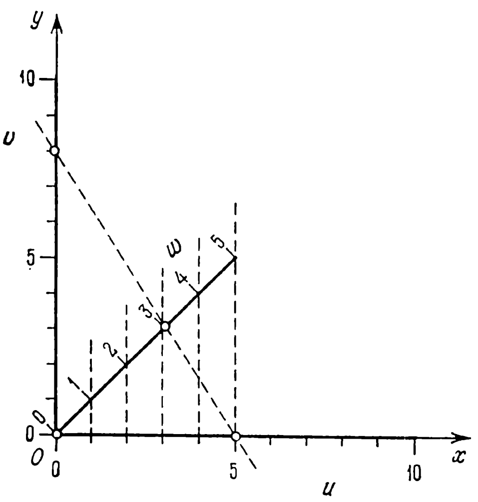


Fig. 122. Abaque à points alignés à trois échelles rectilignes concourantes pour la formule $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$

L'intervalle de variation de w est [0, 5]. Posons $m = n = 5$ mm. Les équations des éléments de l'abaque s'écriront alors:

échelle u:

$$x = 5u, \quad y = 0;$$

échelle v:

$$x = 0, \quad y = 5v;$$

échelle w:

$$x = 5w, \quad y = 5w.$$

De ces équations il résulte que les échelles u et v sont métriques et ont les axes de coordonnées pour support. L'échelle w est rectiligne et métrique; elle a pour support la bissectrice de l'angle des coordonnées.

Traçons sur les axes Ox et Oy les échelles métriques u et v de module 5 mm entre 0 et 10. Menons la bissectrice de l'angle des coordonnées, puis par les points cotés de l'échelle u, des droites auxiliaires parallèles à l'axe Oy jusqu'à leur intersection avec cette bissectrice. Elles déterminent l'échelle w sur cette dernière. Ce procédé est basé sur l'utilisation, pour la construction de l'échelle w, de la première équation $x = 5w$. La figure 122 représente l'abaque construit par ce procédé. La droite résolvante est positionnée par la solution de l'exemple numérique: $u = 5$, $v = 8$; réponse $w = 3$.

§ 6.5. Abaque à points alignés à trois échelles rectilignes parallèles

Dans la forme de Cauchy (6.14), remplaçons les fonctions f_3, g_3 et h_3 par $\overline{f_3}$, $\overline{g_3}$ et $\overline{h_3}$ et posons ensuite $\overline{f_3} = 1$, $\overline{g_3} = 1$ et $\overline{h_3} = -f_3$. On obtient la forme (6.11):

$$f_1 + f_2 = f_3.$$

Les équations des échelles de l'abaque de cette forme s'écrivent:

échelle u:

$$x = 0, \quad y = m(f_1 - a);$$

échelle v:

$$x = H, \quad y = n(f_2 - b);$$

échelle w:

$$x = \frac{mH}{m+n}, \quad y = \frac{mn}{m+n}(f_3 - a - b).$$

Le schéma de l'abaque est représenté sur la figure 123.

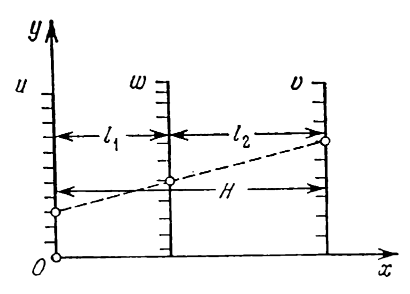


Fig. 123. Schéma d'un abaque à points alignés à trois échelles parallèles pour la forme $f_1 + f_2 = f_3$

Des équations des éléments de l'abaque il résulte que les échelles u, v et w sont portées par des droites parallèles. L'écartement

des échelles extrêmes u et v est égal à H, celui des échelles u et w à

$$\frac{mH}{m+n}.$$

Calculons l'écartement des échelles w et v. Il vaut

$$\frac{nH}{m+n}.$$

Posons

$$l_1=\frac{mH}{m+n}, \quad l_2=\frac{nH}{m+n}.$$

Il vient

$$l_1+l_2=H \quad \text{et} \quad \frac{l_1}{l_2}=\frac{m}{n}.$$

Mettons l'équation (6.11) sous la forme

$$f_2+(-f_3)=(-f_1) \text{ et } f_1+(-f_3)=(-f_2),$$

on obtient des abaques dans lesquels les échelles u et v sont médianes. On suppose toujours que les paramètres m et n sont positifs.

Tirons les paramètres m et n à partir de la condition d'égalité des longueurs des échelles u et v à une grandeur donnée L, qui est la hauteur de l'abaque. Déterminons les paramètres a et b à partir de la condition que les extrémités inférieures des échelles u et v sont situées sur l'axe Ox.

Exemple 32. Traçons un abaque à trois échelles parallèles pour la formule (2.7)

$$P=50+0{,}75\,(T-150)+0{,}25\,(A-20)$$

sur les intervalles suivants:

$$150 \leqslant T \leqslant 190 \text{ cm}, \quad 20 \leqslant A \leqslant 80 \text{ ans}, \quad 50 \leqslant P \leqslant 95 \text{ kg}.$$

Mettons (2.7) sous la forme

$$0{,}75\,(T-150)+0{,}25\,(A-20)=P-50$$

et comparons avec (6.11). Il vient

$$f_1=0{,}75\,(T-150), \quad f_2=0{,}25\,(A-20), \quad f_3=P-50.$$

Ecrivons les équations des éléments de l'abaque en posant directement $a=b=0$:

échelle T:

$$x=0, \quad y=m\cdot 0{,}75\,(T-150);$$

échelle A:

$$x=H, \quad y=n\cdot 0{,}25\,(A-20);$$

échelle P:

$$x=\frac{mH}{m+n}, \quad y=\frac{mn}{m+n}\,(P-50).$$

Convenons que la hauteur de l'abaque est $L = 200$ mm et que la largeur est $H = 150$ mm.

Déterminons le paramètre m à partir de la condition que la longueur L de l'échelle T doit être égale à 200 mm. On a

$$200 = m \cdot 0,75\,(T_2 - 150) - m \cdot 0,75\,(T_1 - 150),$$

où $T_1 = 150$ cm et $T_2 = 190$ cm. D'où

$$m = \frac{200}{0,75 \cdot 40} = 6,7 \text{ mm}.$$

Posons $m = 6$ mm. Il vient

$$L = 6 \cdot 0,75 \cdot 40 = 180 \text{ mm}.$$

Déterminons le paramètre n à partir de la condition $L = 200$ mm. On a

$$200 = n \cdot 0,25\,(A_2 - 20) - n \cdot 0,25\,(A_1 - 20),$$

où $A_1 = 20$ ans, $A_2 = 80$ ans. D'où

$$n = \frac{200}{15} = 13,3 \text{ mm}.$$

Posons $n = 12$ mm. On a

$$L = 12 \cdot 15 = 180 \text{ mm}.$$

Donc $m = 6$ mm, $n = 12$ mm et $H = 150$ mm. Pour ces valeurs des paramètres, les équations des échelles de l'abaque s'écrivent :

échelle T :

$$x = 0, \quad y = 6 \cdot 0,75\,(T - 150);$$

échelle A :

$$x = 150, \quad y = 12 \cdot 0,25\,(A - 20);$$

échelle P :

$$x = \frac{6 \cdot 150}{6+12}, \quad y = \frac{6 \cdot 12}{6+12}\,(P - 50).$$

Les modules des échelles métriques T, A et P valent donc respectivement

$$m_T = 6 \cdot 0,75 = 4,5 \text{ mm}, \quad m_A = 12 \cdot 0,25 = 3 \text{ mm},$$

$$m_P = \frac{6 \cdot 12}{6+12} = 4 \text{ mm},$$

et l'écartement l_1 des échelles T et P

$$\frac{6 \cdot 150}{6+12} = 50 \text{ mm}.$$

Les points des échelles T, P et A cotés respectivement 150 cm, 50 kg et 20 ans sont situés sur l'axe Ox, car les ordonnées sont nulles pour ces valeurs des variables. Ces données suffisent à construire

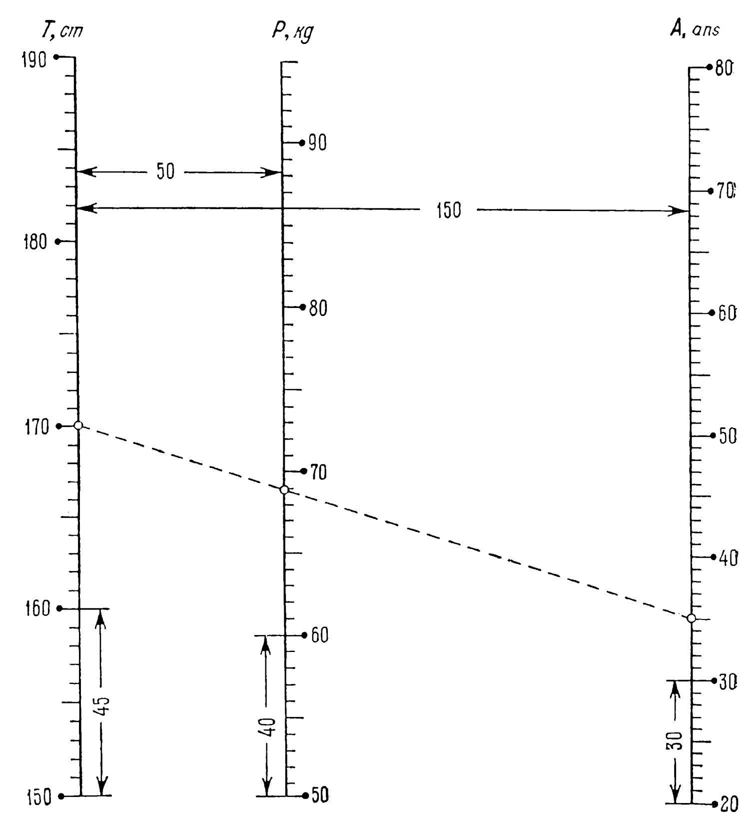


Fig. 124. Abaque à points alignés pour la formule (2.7)

l'abaque. L'abaque représenté sur la figure 124 correspond à l'exemple numérique: $T = 170$ cm, $A = 35$ ans; réponse $P = 69$ kg.

§ 6.6. Abaque à points alignés à échelles parallèles pour un système de deux équations

Soit le système d'équations (6.29)

$$\left.\begin{aligned} f_3(w) &= Af_1(u) + Bf_2(v), \\ f_4(t) &= Cf_1(u) + Df_2(v), \end{aligned}\right\}$$

où A, B, C et D sont des coefficients numériques. Ce système peut être représenté par un abaque à échelles parallèles u, v, w et t à simple alignement.

Ecrivons tout d'abord les équations des échelles de l'abaque de la première équation du système (6.29), qui contiennent les paramètres H, m, n, a et b:

échelle u:

$$x = 0, \quad y = m\,(Af_1 - a);$$

échelle v:

$$x = H, \quad y = n\,(Bf_2 - b);$$

échelle w:

$$x = \frac{mH}{m+n}, \quad y = \frac{mn}{m+n}(f_3 - a - b).$$

Prenons les échelles u et v de l'abaque représentant la deuxième équation du système (6.29) identiques à celles de l'abaque de la

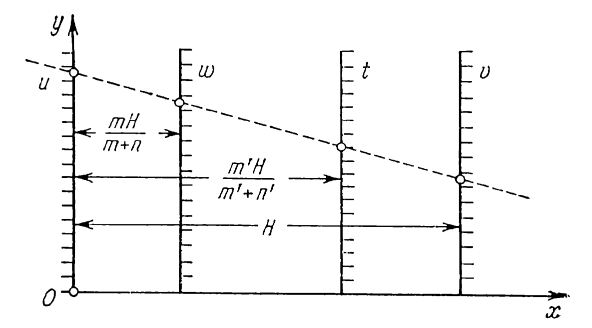


Fig. 125. Schéma d'un abaque à points alignés à quatre échelles parallèles liées par un alignement pour le système d'équations (6.29)

première équation. A cet effet il faut déterminer les paramètres m', n', a' et b' figurant dans les équations des échelles parallèles à partir des conditions $mA = m'C$, $nB = n'D$, $ma = m'a'$, $nb = n'b'$. D'où il vient

$$m' = \frac{mA}{C}, \quad n' = \frac{nB}{D}, \quad a' = \frac{aC}{A}, \quad b' = \frac{bD}{B}.$$

Les équations de l'échelle t s'écrivent donc:

$$x = \frac{m'H}{m'+n'}, \quad y = \frac{m'n'}{m'+n'}(f_4 - a' - b').$$

On supposera que les paramètres m' et n' sont positifs, i.e. les coefficients A et C sont de même signe ainsi que les coefficients B et D. La figure 125 représente l'abaque. La projection de l'abaque

implique le choix des paramètres H, m, n, a et b. Le paramètre H est déterminé à partir de la condition d'obtention d'un abaque de largeur donnée, les paramètres m et n à partir de la condition d'égalité des longueurs des échelles u et v à une longueur donnée L, les paramètres a et b à partir de la condition de disposition des extrémités inférieures des échelles u et v sur l'axe Ox.

Les systèmes (6.30) et (6.31)

$$\left.\begin{aligned} w &= a_1 + b_1 u + c_1 v, \\ t &= a_2 + b_2 u + c_2 v; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= a_1 u^{b_1} v^{c_1}, \\ t &= a_2 u^{b_2} v^{c_2}, \end{aligned}\right\}$$

a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 étant des constantes, sont des cas particuliers importants du système d'équations (6.29).

Le système (6.30) se ramène au système (6.29) moyennant la transformation

$$\left.\begin{aligned} w - a_1 &= b_1 u + c_1 v, \\ t - a_2 &= b_2 u + c_2 v. \end{aligned}\right\}$$

Donc

$$f_1 = u, \quad f_2 = v, \quad f_3 = w - a_1, \quad f_4 = t - a_2,$$
$$A = b_1, \quad B = c_1, \quad C = b_2, \quad D = c_2.$$

En prenant le logarithme du système (6.31) on obtient le système (6.29)

$$\left.\begin{aligned} \log \frac{w_1}{a_1} &= b_1 \log u + c_1 \log v, \\ \log \frac{t}{a_2} &= b_2 \log u + c_2 \log v. \end{aligned}\right\}$$

Donc

$$f_1 = \log u, \quad f_2 = \log v, \quad f_3 = \log \frac{w}{a_1}, \quad f_4 = \log \frac{t}{a_2},$$
$$A = b_1, \quad B = c_1, \quad C = b_2, \quad D = c_2.$$

Les échelles de l'abaque du système (6.30) étant toutes métriques, et celles de l'abaque du système (6.31) toutes logarithmiques, on peut construire ces abaques sans calcul. Pour cela il faut d'abord tracer les échelles métriques ou logarithmiques u et v avec des modules arbitraires et repérer ensuite par la méthode des intersections deux points de l'échelle w et deux points de l'échelle t, puis faire passer par ces points les supports rectilignes des échelles que l'on graduera avec des canevas métriques ou logarithmiques.

§ 6.7. Exemple de construction d'un abaque à points alignés à échelles logarithmiques parallèles pour un système de deux équations

Construisons un abaque pour le système d'équations [65]

$$p = \frac{b^2}{8h}, \quad m = \frac{b}{4h} \tag{6.37}$$

qui se présente en hydraulique dans le calcul des lits paraboliques d'équation $y^2 = 2px$, p étant le paramètre de la parabole; h la profondeur; b la largeur du lit à la profondeur h; m le coefficient d'écartement des talus à la profondeur h. Les quantités p, h et b sont mesurées en mètres.

Les intervalles de variation sont : $1 \leqslant b \leqslant 20$, $0{,}1 \leqslant h \leqslant 4$, $0{,}1 \leqslant p \leqslant 100$, $0{,}2 \leqslant m \leqslant 30$.

Ecrivons le système d'équations (6.37) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \log(8p) &= 2\log b - \log h, \\ \log(4m) &= \log b - \log h \end{aligned}\right\}$$

et comparons avec le système principal (6.29). Il vient

$$f_1 = \log b, \quad f_2 = -\log h,$$
$$f_3 = \log(8p), \quad f_4 = \log(4m),$$
$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 1.$$

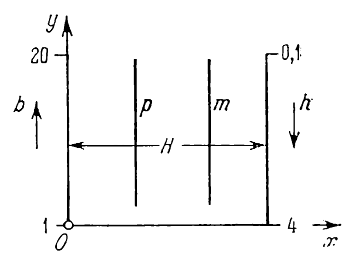


Fig. 126. Schéma d'un abaque à points alignés à quatre échelles logarithmiques parallèles liées par un alignement pour le système d'équations (6.37)

L'abaque est représenté sur la figure 126. L'échelle b est orientée vers le haut, l'échelle h vers le bas.

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent :

échelle b:

$$x = 0, \quad y = \overline{m}\,(2\log b - a);$$

échelle h:

$$x = H, \quad y = n\,(-\log h - \overline{b});$$

échelle p:

$$x = \frac{\overline{m}H}{\overline{m}+n}, \quad y = \frac{\overline{m}n}{\overline{m}+n}\,[\log(8p) - a - \overline{b}];$$

échelle m:

$$x = \frac{m'H}{m'+n'}, \quad y = \frac{m'n'}{m'+n'}\,[\log(4m) - a' - b'].$$

Nous avons désigné les paramètres de transformation par $\overline{m}$ et $\overline{b}$ pour ne pas les confondre avec les variables essentielles. Les para-

mètres m', n', a', b' sont définis par les formules

$$m' = 2\overline{m}, \quad n' = n, \quad a' = 0{,}5a, \quad b' = \overline{b}.$$

Prenons la hauteur de l'abaque $L = 160$ mm et la largeur $H = 130$ mm. Tirons les modules $\overline{m}$ et n à partir des équations

$$160 = 2\overline{m} \log \frac{20}{1}, \quad 160 = n \log \frac{4}{0{,}1}.$$

D'où

$$\overline{m} = \frac{80}{\log 20} = \frac{80}{1{,}3} \approx 61{,}5 \text{ mm},$$

$$n = \frac{160}{\log 40} = \frac{160}{1{,}6} = 100 \text{ mm}.$$

Posons $\overline{m} = 125/2 = 62{,}5$ mm, $n = 100$ mm. Alors

$$m' = 2\overline{m} = 2 \cdot 62{,}5 = 125 \text{ mm}, \quad n' = n = 100 \text{ mm}.$$

Prenons les paramètres a et $\overline{b}$ tels que les points de cotes $b = 1$ et $h = 4$ soient situés sur l'axe Ox. Les ordonnées de ces points doivent être nulles, i.e.

$$0 = \overline{m}\,(2 \log 1 - a), \quad 0 = n\,(-\log 4 - \overline{b}).$$

Il résulte $a = 0$ et $\overline{b} = -\log 4$. D'où $a' = 0$, $b' = -\log 4$.

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent donc:

échelle b:

$$x = 0, \quad y = 125 \log b;$$

échelle h:

$$x = 130, \quad y = 100 \log \frac{4}{h};$$

échelle p:

$$x = \frac{62{,}5 \cdot 130}{62{,}5 + 100}, \quad y = \frac{62{,}5 \cdot 100}{62{,}5 + 100} \log (32p);$$

échelle m:

$$x = \frac{125 \cdot 130}{125 + 130}, \quad y = \frac{125 \cdot 100}{125 + 100} \log (16m).$$

Les équations des échelles p et m peuvent encore s'écrire:

échelle p:

$$x = 50, \quad y = 38{,}5 \log (32p);$$

échelle m:

$$x = 72{,}2, \quad y = 55{,}6 \log (16m).$$

Calculons les ordonnées des points de cotes $p = 1$ et $m = 1$ des échelles p et m. Pour le point $p = 1$ on obtient

$$y = 38{,}5 \cdot \log 32 = 38{,}5 \cdot 1{,}504 = 57{,}9 \text{ mm},$$

et pour le point $m = 1$

$$y = 55{,}6 \cdot \log 16 = 55{,}6 \cdot 1{,}204 = 66{,}9 \text{ mm}.$$

Nous avons tout pour construire l'abaque à l'aide des canevas logarithmiques. Retraçons-le en y indiquant le sens, le module et les dimensions des échelles (fig. 127). Préparons des canevas logarithmiques de modules 38,5; 55,6; 100; 125 mm et traçons l'abaque. La figure 128 représente la solution de l'exemple numérique: $p = 5$ m, $h = 0{,}6$ m; réponse: $b = 4{,}9$ m, $m = 2$.

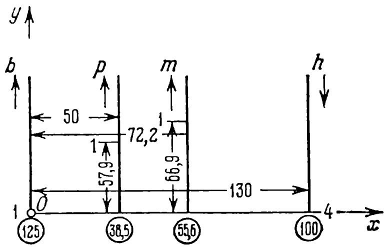


Fig. 127. Schéma d'un abaque à points alignés à quatre échelles logarithmiques parallèles pour le système d'équations (6.37) avec indication du sens, du module et des dimensions des échelles

Construisons maintenant les échelles p et m par la méthode des intersections. Prenons les échelles logarithmiques b et h de modules 125 et 100 mm. Orientons l'échelle b vers le haut et l'échelle h vers le bas. Disposons ces échelles sur des droites parallèles telles que les points des échelles b et h

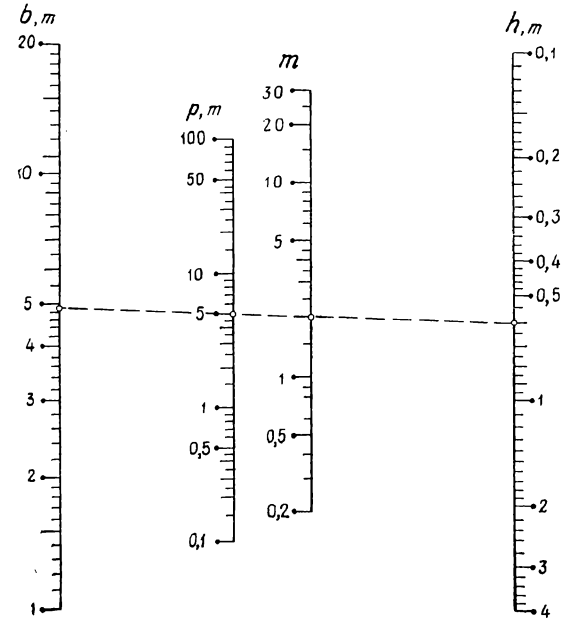


Fig. 128 Abaque à points alignés à quatre échelles logarithmiques parallèles liées par un alignement pour le système d équations (6.37)

de cotes 1 et 4 soient situés sur une horizontale. Plaçons ces échelles à une distance de 130 mm l'une de l'autre et construisons-les à l'aide de canevas logarithmiques.

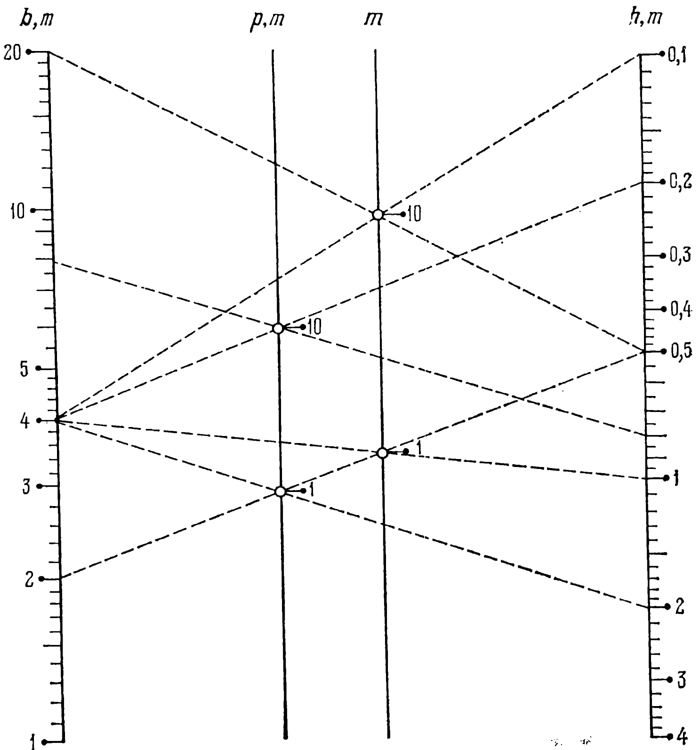


Fig. 129. Construction des échelles *p* et *m* dans un abaque du système d'équations (6.37) par la méthode des intersections

Résolvons la première et la deuxième équation du système (6.37) par rapport à h. On obtient

$$h = \frac{b^2}{8p} \quad \text{et} \quad h = \frac{b}{4m}.$$

Posons $p = 1$ m ; $p = 10$ m ; $m = 1$; $m = 10$ et calculons h pour des couples convenables de valeurs de b dans l'intervalle $1 \leqslant b \leqslant 20$. On obtient les tableaux 19 et 20. Construisons les points $p = 1$ m ; $p = 10$ m ; $m = 1$ et $m = 10$ par la méthode des intersections en utilisant les tableaux 19 et 20. On obtient l'abaque de la figure 129. Les échelles p et m sont ensuite graduées à l'aide de canevas loga-

Tableau 19

$p = 1$ m		$p = 10$ m	
b	h	b	h
2	0,5	4	0,2
4	2	8	0,8

Tableau 20

$m = 1$		$m = 10$	
b	h	b	h
2	0,5	4	0,1
4	1	20	0,5

rithmiques. Pour les préparer on reporte sur des bandes de papier les intervalles délimités par les points $p = 1$ m et $p = 10$ m, $m = 1$ et $m = 10$ à l'aide du triangle des échelles logarithmiques.

§ 6.8. Abaque à points alignés à trois échelles parallèles et une famille de lignes

Dans la pratique on a souvent affaire à des systèmes d'équations se ramenant à la forme (6.32)

$$\left.\begin{aligned} f_1(u)+f_2(v)=f_3(w), \\ f_{12}(u, v)=f_4(t). \end{aligned}\right\}$$

La première des équations du système (6.32) peut être représentée par un abaque à points alignés à échelles u, v et w parallèles. En

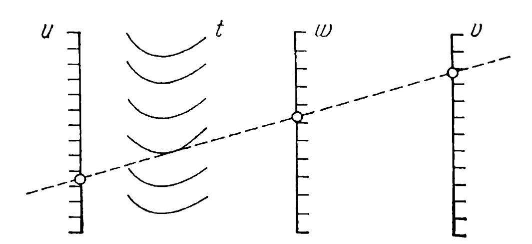


Fig. 130. Schéma d'un abaque points alignés à trois échelles parallèles et une famille de lignes liées par un alignement pour le système d'équations (6.32)

utilisant les échelles u et v de cet abaque, on peut, sur des exemples (cf. § 5.4), construire un abaque à deux contacts ponctuels et un contact tangentiel pour la deuxième équation du système. On obtient ainsi un abaque sur lequel le système d'équations (6.32) sera résolu par un simple alignement. La figure 130 représente le schéma de l'abaque. Cet abaque possède trois contacts ponctuels et un contact tangentiel.

Exemple 33. Soit à représenter le système d'équations [35]

$$\left.\begin{aligned} Q &= (bh+mh^2)\,v,\\ v &= C\sqrt{Ri},\\ \chi &= b+2h\sqrt{1+m^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.38)$$

utilisé dans le calcul hydraulique des canaux trapézoïdaux. Les quantités R et C sont auxiliaires et se déterminent par les formules

$$R=\frac{bh+mh^2}{b+2h\sqrt{1+m^2}}, \qquad C=\frac{1}{n}R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)},$$

m, n et b sont des constantes. Ici Q est le débit, v la vitesse, h la profondeur, i l'inclinaison, χ le périmètre mouillé, m le coefficient d'écartement des talus, n le coefficient de rugosité, b la largeur du canal au fond.

Les quantités m, n et b étant constantes, désignons-les par m_0, n_0 et b_0. Le système (6.38) s'écrit alors

$$Q=\sqrt{i}\,F(h), \qquad (6.39)$$

$$Q=(b_0h+m_0h^2)\,v, \qquad (6.40)$$

$$h=\frac{\chi-b_0}{2\sqrt{1+m_0^2}}, \qquad (6.41)$$

où

$$F(h)=\frac{b_0h+m_0h^2}{n_0}\times$$

$$\times\left[\frac{b_0h+m_0h^2}{b_0+2h\sqrt{1+m_0^2}}\right]^{2,5\sqrt{n_0}+0,37-0,75\sqrt{\frac{b_0h+m_0h^2}{b_0+2h\sqrt{1+m_0^2}}}(\sqrt{n_0}-0,1)}.$$

La marche à suivre pour représenter le système d'équations (6.39), (6.40) et (6.41) est la suivante. Prenons le logarithme de l'équation (6.39)

$$\log Q=\log F(h)+\log\sqrt{i}$$

et représentons-la par un abaque à échelles parallèles. Construisons la famille de lignes v à l'aide de l'équation (6.40) et des échelles h et Q sur des exemples. Utilisons ensuite l'équation (6.41) pour accoler l'échelle χ à l'échelle h.

Construisons un abaque de ce type pour le cas où $m_0=0$, $n_0=0{,}015$ et $b_0=0{,}5$ m. Prenons les intervalles de variation suivants: $0{,}1\leqslant h\leqslant 1{,}5$ m; $0{,}001\leqslant i\leqslant 0{,}03$; $0{,}02\leqslant Q\leqslant 3$ m³/s; $0{,}4\leqslant v\leqslant 4$ m/s; $0{,}7\leqslant\chi\leqslant 3{,}4$ m.

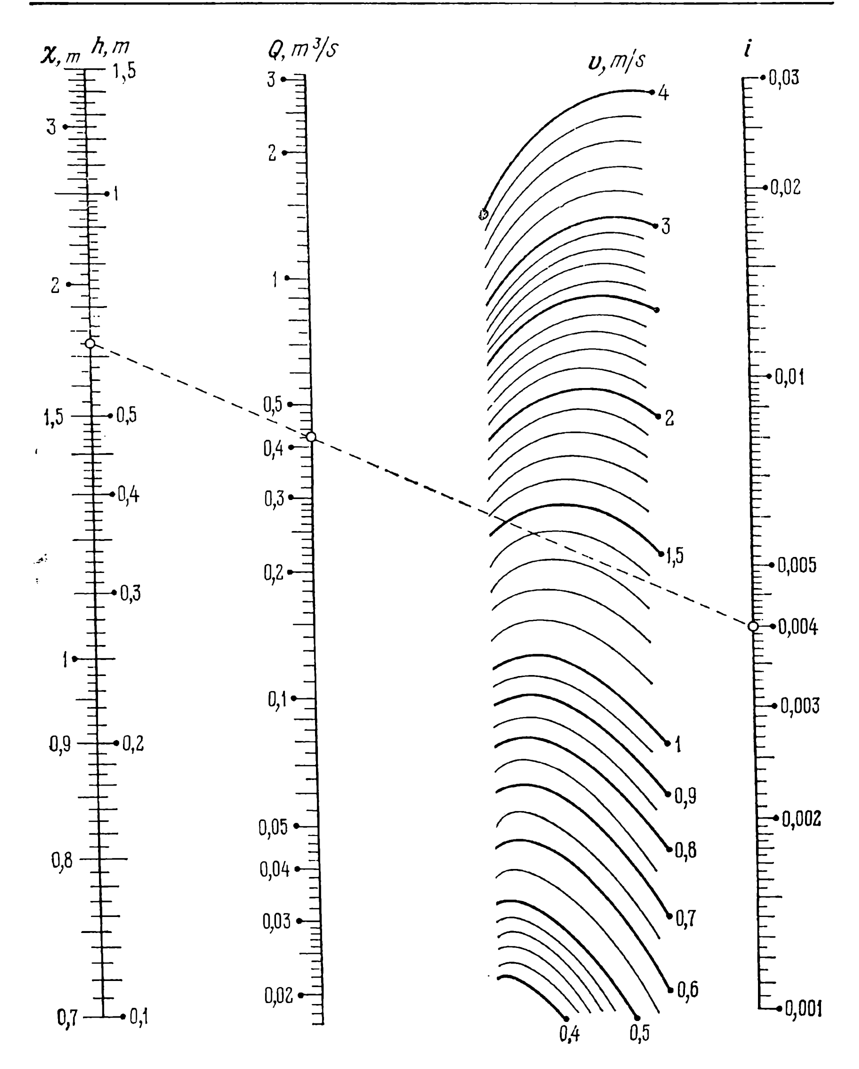


Fig. 131. Abaque à points alignés pour le système d'équations (6.38) tracé pour **les valeurs** $m = 0$, $n = 0{,}015$ et $b = 0{,}5$ m

Les équations des échelles h, i et Q s'écrivent:
échelle h:

$$x = 0, \quad y = m\,[\log F\,(h) - a]\,;$$

échelle i:

$$x = H, \quad y = n\left[\log\sqrt{i} - b\right];$$

échelle Q:

$$x = \frac{mH}{m+n}, \quad y = \frac{mn}{m+n}(\log Q - a - b).$$

Déduisons les équations de l'échelle χ à partir de celles de l'échelle h sans modifier la première équation et en portant l'expression de h dans la seconde:

$$x = 0, \quad y = m\left[\log F\left(\frac{\chi - b_0}{2\sqrt{1+m_0^2}}\right) - a\right].$$

Posons $m = 150$ mm, $n = 300$ mm, $H = 150$ mm, $a = \log F$ (0, 1), $b = \log 0{,}001$. Pour ces valeurs des paramètres m et n, les modules des échelles logarithmiques Q et i sont respectivement égaux à 100 et 150 mm. La figure 131 représente l'abaque correspondant. La famille de lignes v a été construite sur des exemples à l'aide des équations (6.40). L'abaque correspond à l'exemple numérique: $i = 0{,}004$, $Q = 0{,}42$ m³/s; réponse $v = 1{,}33$ m/s, $h = 0{,}62$ m, $\chi = 1{,}75$ m.

Le travail [35] renferme une collection de tels abaques construits pour les combinaisons des paramètres m, n et b les plus utilisées.

§ 6.9. Abaque à points alignés à deux échelles parallèles et une échelle rectiligne oblique

Dans la forme de Cauchy (6.14), remplaçons de nouveau les fonctions f_3, g_3 et h_3 par $\overline{f}_3$, $\overline{g}_3$ et $\overline{h}_3$ et posons $\overline{f}_3 = 1$, $\overline{g}_3 = -f_3$ et $\overline{h}_3 = 0$. On obtient la forme (6.12)

$$f_1 = f_2 f_3.$$

Les équations des éléments de son abaque s'écrivent:

échelle u:

$$x = 0, \quad y = f_1;$$

échelle v:

$$x = H, \quad y = f_2;$$

échelle w:

$$x = \frac{Hf_3}{f_3 - 1}, \quad y = 0.$$

Des équations de l'échelle w il résulte que le support de cette dernière coïncide avec l'axe Ox. Le schéma de l'abaque est représenté sur la figure 132.

Les équations des échelles de l'abaque renfermant les paramètres de transformation s'écrivent:

échelle u:

$$x = 0, \quad y = m(f_1 - a);$$

échelle v:

$$x = H, \quad y = n(f_2 - b);$$

échelle w:

$$x = \frac{mHf_3}{mf_3 - n}, \quad y = \frac{mn(a - bf_3)}{mf_3 - n}.$$

Nous supposerons de nouveau que les paramètres m et n sont positifs. Lorsqu'on choisira la variante de l'abaque, on aura à l'esprit l'écriture suivante de l'équation (6.12)

$$(-f_1) = f_2(-f_3) \text{ ou } f_1 = (-f_2)(-f_3).$$

D'où il vient que dans les équations des éléments de l'abaque, on peut simultanément inverser les signes des fonctions f_1 et f_3 ou f_2 et f_3.

La méthode de construction des abaques de la forme (6.12) est analogue à celle des abaques de la forme (6.14) et revient à choisir les paramètres H, m, n, a et b, et les sens des échelles parallèles.

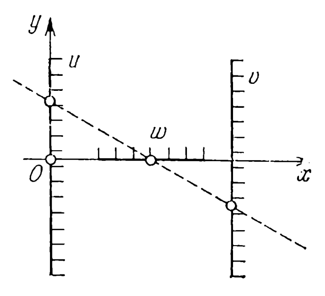


Fig. 132. Schéma d'un abaque à points alignés à deux échelles parallèles coupées par une échelle rectiligne pour la forme $f_1 = f_2 f_3$

Exemple 34. Construisons un abaque du type considéré pour la formule [66]

$$A = 0{,}0131 \frac{v^{1,37}}{P^{1,135}}, \qquad (6.42)$$

qui donne le taux d'alcool contenu dans le sang de l'homme A en fonction du poids P et de la quantité de whisky v consommé à jeun pendant une heure. Les intervalles de variation sont: $40 \leqslant P \leqslant 110$ kg; $50 \leqslant v \leqslant 400$ g/h; $0{,}05 \leqslant A \leqslant 0{,}5$ %. Posons $P_1 = 40$ kg, $P_2 = 110$ kg, $v_1 = 50$ g/h, $v_2 = 400$ g/h.

Ramenons la formule (6.42) à la forme (6.12):

$$P^{1,135} = (-v^{1,37})\left(-\frac{0{,}0131}{A}\right).$$

Posons

$$f_1 = P^{1,135}, \quad f_2 = -v^{1,37}, \quad f_3 = -\frac{0{,}0131}{A}.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

échelle P:

$$x = 0, \quad y = m(P^{1,135} - a);$$

échelle v:

$$x = H, \quad y = n(-v^{1,37} - b);$$

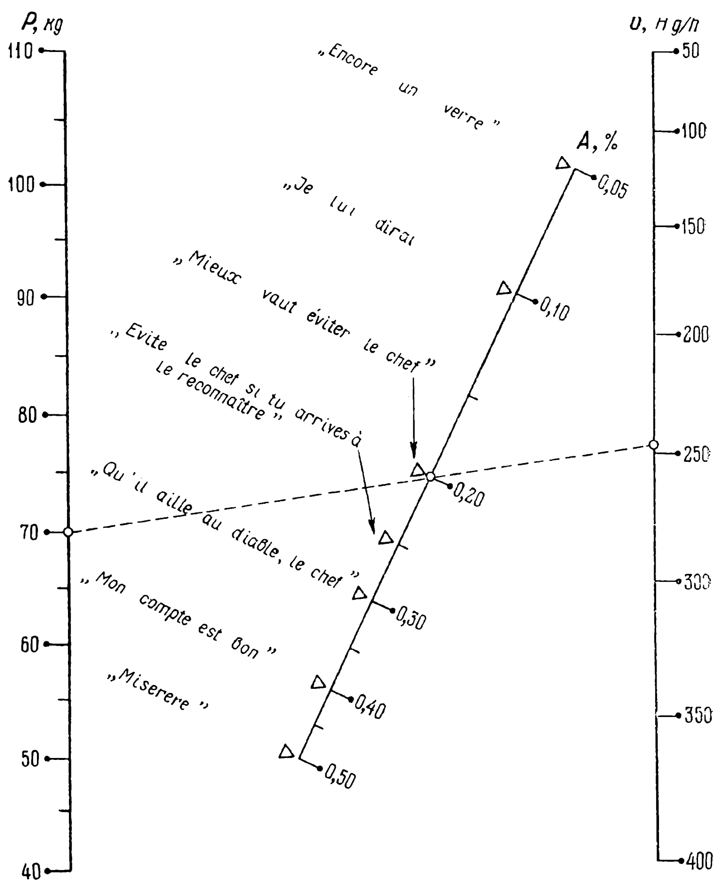


Fig. 133. Abaque à points alignés à deux échelles parallèles coupées par une échelle rectiligne pour la formule (6.42)

échelle A:

$$x=\frac{mH\left(-\frac{0,0131}{A}\right)}{m\left(-\frac{0,0131}{A}\right)-n}, \quad y=\frac{mn\left[a-b\left(-\frac{0,0131}{A}\right)\right]}{m\left(-\frac{0,0131}{A}\right)-n}.$$

Prenons $H=140$ mm et $L=200$ mm. Calculons les paramètres m et n:

$$m=\frac{L}{P_2^{1,135}-P_1^{1,135}}=\frac{200}{110^{1,135}-40^{1,135}}\approx 1,4 \text{ mm},$$

$$n = \frac{L}{v_2^{1,37} - v_1^{1,37}} = \frac{200}{400^{1,37} - 50^{1,37}} \approx 0{,}057 \text{ mm}.$$

Les paramètres a et b se déterminent à partir des conditions que les points de cote $P_1 = 40$ kg de l'échelle P et de cote $v_2 = 400$ g/h de l'échelle v sont situés sur l'axe Ox. D'où il vient

$$a = P_1^{1,135} = 40^{1,135} \approx 65{,}5\,;$$

$$b = -v_2^{1,37} = -400^{1,37} \approx -3700.$$

Finalement les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle P:

$$x = 0, \quad y = 1{,}4\,(P^{1,135} - 65{,}5)\,;$$

échelle v:

$$x = 140, \quad y = 0{,}057\,(-v^{1,37} + 3700)\,;$$

échelle w:

$$x = \frac{1{,}4 \cdot 140\left(-\frac{0{,}0131}{A}\right)}{1{,}4\left(-\frac{0{,}0131}{A}\right) - 0{,}057}, \quad y = \frac{1{,}4 \cdot 0{,}057\left[65{,}5 + 3700\left(-\frac{0{,}0131}{A}\right)\right]}{1{,}4\left(-\frac{0{,}0131}{A}\right) - 0{,}057}.$$

La figure 133 représente l'abaque construit d'après ces équations. L'échelle A porte des inscriptions illustrant le comportement de l'homme aux divers stades d'ébriété. Ainsi, avec un poids de 70 kg, pour atteindre le stade « mieux vaut éviter le chef » ($A = 0{,}2$ %), il faut incurgiter environ 250 g de whisky en une heure. L'auteur de cet abaque, le nomographe américain Davis [66] écrit que des 600 à 700 abaques qu'il a construits, celui-ci a eu le plus de succès (et pour cause) et a été publié dans de nombreuses revues.

On remarquera qu'après la prise de logarithme, la formule (6.42) se ramène à la forme (6.11) et peut par conséquent être représentée par un abaque à points alignés à échelles parallèles ou par un abaque du type règle à calcul à un curseur. Toutes les échelles de ces abaques seront logarithmiques.

§ 6.10. Abaque à points alignés pour une formule d'interpolation linéaire successive dans des tableaux à deux entrées

Soit à représenter par un abaque la formule (6.20)

$$w = Auv + Bu + Cv + D,$$

où A, B, C et D sont des coefficients numériques. La relation (6.20) décrit une *case tabulaire à deux entrées* (tableau 21) donnant les valeurs d'une fonction $w = F(u, v)$ pour deux valeurs de la variable u

et deux valeurs de la variable v, dans le cas, où une interpolation linéaire est valable dans cette case aussi bien sur u que sur v.

Tableau 21

v \ u	u_1	u_2
v_1	w_{11}	w_{21}
v_2	w_{12}	w_{22}

La relation (6.20) peut être ramenée à la forme (6.12). Faisons passer D dans le premier membre de (6.20) et ajoutons aux deux membres le terme BC/A

$$w+\frac{BC}{A}-D=(Auv+Cv)+\left(Bu+\frac{BC}{A}\right)$$

ou

$$w+\frac{BC}{A}-D=v(Au+C)+\frac{B}{A}(Au+C),$$

ou

$$w+\frac{BC}{A}-D=(Au+C)\left(v+\frac{B}{A}\right).$$

Mettons cette équation sous la forme

$$Au+C=\left(w+\frac{BC}{A}-D\right)\cdot\frac{1}{v+B/A}$$

et comparons avec (6.12). Posons

$$f_1=Au+C,\quad f_2=w+\frac{BC}{A}-D,\quad f_3=\frac{1}{v+B/A}.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle u:

$$x=0,\quad y=Au+C;$$

échelle w:

$$x=H,\quad y=w+\frac{BC}{A}-D;$$

échelle v:

$$x=\frac{H}{1-B/A-v},\quad y=0.$$

L'abaque correspondant à cette équation est représenté sur la figure 134. Les échelles u et w sont parallèles et métriques, l'échelle v métrique et projective.

Il existe une méthode simple de construction d'abaque de ce type. Supposons pour fixer les idées que dans l'intervalle de variation de v, l'échelle v ne coupe pas les échelles parallèles de l'abaque

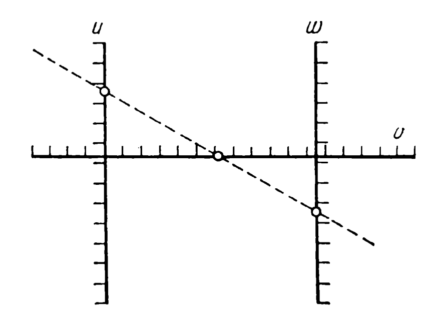


Fig. 134. Schéma d'un abaque à points alignés à deux échelles parallèles métriques u et w coupées par une échelle projective rectiligne v pour la forme $w = Auv + Bu + Cv + D$

Fig. 135. Schéma d'un abaque à points alignés pour la forme $w = Auv + Bu + Cv + D$ dans le cas où l'échelle v oblique ne coupe pas les échelles parallèles u et w

et que celui-ci est de la forme représentée sur la figure 135. Supposons que w est la variable inconnue. Soit

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \quad v_1 \leqslant v \leqslant v_2.$$

Dressons le tableau 21 des valeurs de w pour les valeurs extrêmes de u et v à l'aide de la formule (6.20). Supposons que $w_{22} > w_{21} > w_{12} > w_{11}$.

Traçons les échelles parallèles métriques u et w à une distance arbitraire l'une de l'autre. Choisissons-les de modules tels que leurs longueurs soient approximativement égales, et de sens tel que l'échelle w se trouve entre les échelles u et v (fig. 136). Le point coté v_1 de l'échelle v est le point de rencontre des droites passant par les points u_1 et w_{11}, u_2 et w_{21}. Le point coté v_2 de l'échelle v est le point d'intersection des droites passant par les points u_1 et w_{12}, u_2 et w_{22}. La droite qui passe par les points v_1 et v_2 est le support de l'échelle v. Si celle-ci ne tient pas dans le dessin il faut réduire l'écartement des échelles parallèles ou le module de l'échelle w.

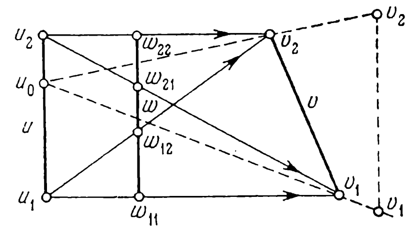


Fig. 136. Schéma de construction d'un abaque à points alignés du type de la figure 135 pour la relation $w = Auv + Bu + Cv + D$, donnée par le tableau 21

Trouvons une méthode de construction des points intercalaires de l'échelle v. Supposons d'abord que cette échelle a déjà été construite. Prenons une valeur quelconque $u = u_0$ et à partir du point coté u_0 de l'échelle u projetons les points de l'échelle v sur l'échelle w. On obtient sur l'échelle w une série de points équidistants si les points de l'échelle v ont été construits avec le même pas Δv. En effet, écrivons l'équation (6.20) sous la forme

$$w = (Au + C)\, v + (Bu + D)$$

et posons $u = u_0$. On obtient

$$w = (Au_0 + C)\, v + (Bu_0 + D)$$

ou

$$w = av + b,$$

où a et b sont des constantes. Il s'ensuit que w est une fonction linéaire de v et à des valeurs égales de Δv correspondent des valeurs égales de Δw. Or l'échelle w est métrique. Donc aux valeurs égales de Δw correspondent des points équidistants de cette échelle.

Ceci nous suggère la méthode suivante de construction de points intercalaires de l'échelle v. Prenons sur l'échelle u un point quelconque de cote u_0 et traçons par ce point les rayons u_0v_1 et u_0v_2. Menons à proximité de l'échelle v une droite parallèle à l'échelle w et marquons sur elle une échelle métrique v en affectant les cotes v_1 et v_2 aux points d'intersection de cette droite avec les rayons. En projetant les points de l'échelle métrique auxiliaire v à partir du point coté u_0 de l'échelle u, on obtient les points intermédiaires sur le support oblique v. Pour u_0 on a intérêt à prendre les valeurs u_1 ou u_2 puisque les rayons u_1v_1 et u_1v_2 ou u_2v_1 et u_2v_2 ont déjà été tracés lors de la construction des points v_1 et v_2 par la méthode des intersections.

Exemple 35. Construisons un abaque pour la formule

$$w = -0{,}02\, uv + 0{,}72\, u + 51\, v + 870$$

sur les intervalles $700 \leqslant u \leqslant 800$; $9 \leqslant v \leqslant 10$. Faisons varier w avec de la marge entre 1700 et 1800.

Tableau 22

Valeurs de w

v \ u	700	800
9	1707	1761
10	1744	1796

Dressons le tableau 22 des valeurs de w pour les valeurs extrêmes de u et v. Traçons (cf. fig. 137) les échelles u et w de même sens, métriques, parallèles, symétriques, de module 1 mm. Disposons ces échelles à 60 mm l'une de l'autre. Construisons les points $v = 9$ et $v = 10$ par la méthode des intersections et joignons-les par une droite. Puis, par la méthode décrite plus haut, portons sur l'échelle v les points

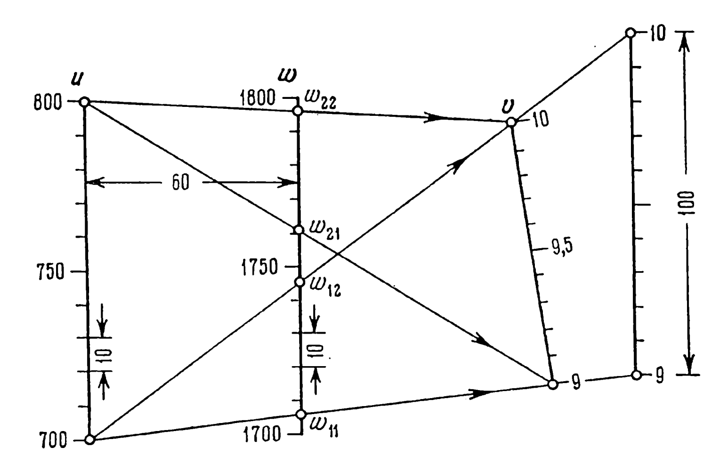


Fig. 137. Abaque à points alignés pour la relation $w = -0{,}02uv + 0{,}72u + 51v + 870$, construit d'après le schéma de l'abaque de la figure 136 sur les données du tableau 22

de division intermédiaires par projection des points d'une échelle métrique auxiliaire à partir du point coté 700 de l'échelle u. Construisons l'échelle métrique auxiliaire à une distance de l'échelle w telle que la longueur de l'échelon soit égale à 10 mm, i.e. la longueur de l'échelle soit égale à 100 mm.

§ 6.11. Abaques à points alignés à deux échelles rectilignes et à champ

Cas d'échelles concourantes. En remplaçant dans la forme (6. 18) les fonctions F_3 et G_3 par F_{34} et G_{34}, on obtient la forme de Cauchy à champ (6.23)

$$\frac{F_{34}}{F_1} + \frac{G_{34}}{F_2} = 1.$$

Les équations des éléments de son abaque s'écrivent :

échelle u :

$$x = mF_1, \quad y = 0;$$

échelle v:

$$x = 0, \quad y = nF_2;$$

champ (w, t):

$$x = mF_{34}, \quad y = nG_{34}.$$

La figure 138 représente cet abaque. On peut le construire dans un système de coordonnées obliques. Les abaques des figures 63 et 65 sont de ce type.

Cas d'échelles parallèles. Dans la forme (6. 14), en remplaçant les fonctions f_3, g_3, h_3 par f_{34}, g_{34} et h_{34}, on obtient la forme de Cauchy à champ (6.22)

$$f_1 f_{34} + f_2 g_{34} + h_{34} = 0.$$

Les équations des éléments de son abaque s'écrivent:

échelle u:

$$x = 0, \quad y = m(f_1 - a);$$

échelle v:

$$x = H, \quad y = n(f_2 - b);$$

champ (w, t):

$$x = \frac{Hmg_{34}}{nf_{34} + mg_{34}}, \quad y = \frac{-mn(af_{34} + bg_{34} + h_{34})}{nf_{34} + mg_{34}}.$$

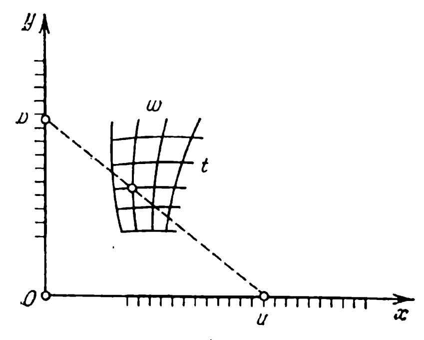


Fig. 138. Schéma d'un abaque à points alignés à échelles rectilignes concourantes et à champ pour la forme $\frac{F_{34}}{F_1} + \frac{G_{34}}{F_2} = 1$

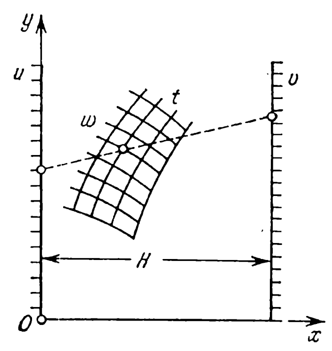


Fig. 139. Schéma d'un abaque à points alignés à échelles parallèles et à champ pour la forme $f_1 f_{34} + f_2 g_{34} + h_{34} = 0$

L'abaque est représenté sur la figure 139. La forme (6.22) est représentée comme la forme (6.14).

Exemple 36. Construisons un abaque pour la formule [67]

$$t^{u-1} = v \frac{\operatorname{Log}(w - t)}{w - t - 1} \qquad (6.43)$$

sur les intervalles suivants: $0{,}3 \leqslant u \leqslant 1$, $0{,}1 \leqslant v \leqslant 20$, $0{,}1 \leqslant w \leqslant 20$, $0{,}001 \leqslant t \leqslant 10$.

Mettons l'équation (6.43) sous la forme (6.22)

$$u \cdot \log t + \log v \cdot (-1) + \left[-\log t - \log \frac{\operatorname{Log}(w-t)}{w-t-1} \right] = 0.$$

On a

$$f_1 = u, \quad f_2 = \log v, \quad f_{34} = \log t, \quad g_{34} = -1,$$

$$h_{34} = -\log t - \log \frac{\operatorname{Log}(w-t)}{w-t-1}.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle u:

$$x = 0, \quad y = m(u-a);$$

échelle v:

$$x = H, \quad y = n(\log v - b);$$

champ (w, t):

$$x = \frac{-Hm}{n \log t - m}, \qquad y = \frac{-mn\left[a \log t - b - \log t - \log \frac{\operatorname{Log}(w-t)}{w-t-1}\right]}{n \log t - m}.$$

La figure 2 (cf. Introduction page 9) représente l'abaque correspondant à ces équations pour les valeurs $H = 250$ mm, $m = 360$ mm, $n = 80$ mm, $a = 0{,}3$, $b = -0{,}9$.

Exemple 37. Construisons un abaque de la formule [59] qui définit le prix de revient des conduites d'eau en acier, d'un diamètre de 200 mm, dans un système d'irrigation stationnaire

$$C_1 = Ap(z, l) + q(z, l), \tag{6.44}$$

où

$$p(z, l) = 6{,}46 \cdot 10^{-12} l z^{4,75} + 0{,}91 z;$$

$$q(z, l) = \frac{2{,}39 \cdot 10^6}{lz} + \frac{8{,}51 \cdot 10^4}{z} + \left(543 - \frac{394}{1 + 0{,}005 \cdot z}\right) \frac{10^4}{z^2} + $$
$$+ 0{,}625(l - 1000).$$

C_1 est le prix de revient, z est la distance entre les conduites d'eau, l la longueur des conduites, A un paramètre variable. Les intervalles de variation des variables sont: $1 \leqslant A \leqslant 6$; $70 \leqslant z \leqslant 200$ m; $200 \leqslant l \leqslant 1000$ m; $500 \leqslant C_1 \leqslant 3000$ roubles à l'hectare.

Mettons (6.44) sous la forme (6.22)

$$Ap(z, l) + (-C_1) \cdot 1 + q(z, l) = 0.$$

On a $f_1 = A$, $f_2 = -C_1$, $f_{34} = p(z, l)$, $g_{34} = 1$, $h_{34} = q(z, l)$.

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle A:

$$x = 0, \quad y = m(A - a);$$

échelle C_1:

$$x = H, \quad y = n(-C_1 - b);$$

champ (z, l):

$$x = \frac{Hm}{np(z, l) + m}, \quad y = \frac{-mn[ap(z, l) + b + q(z, l)]}{np(z, l) + m}.$$

La figure 140 représente l'abaque correspondant à ces équations pour les valeurs $H = 250$ mm, $m = 50$ mm, $n = 0{,}1$ mm, $a = 1$, $b = -3000$.

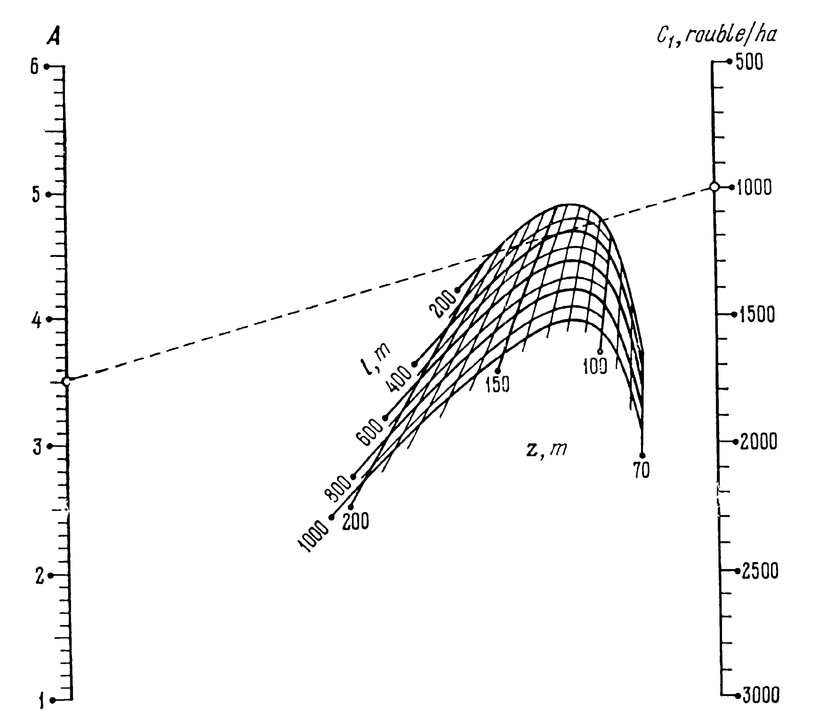


Fig. 140. Abaque à points alignés pour la relation (6.44) construit d'après le schéma de l'abaque de la figure 139

Une particularité intéressante de cet abaque est qu'on peut s'en servir pour déterminer la valeur $z = z^*$ qui réalise le minimum $C_1 = C_1^*$ pour des valeurs données des paramètres A et l. A cet effet

il faut tracer à partir du point donné de l'échelle A une tangente à la ligne donnée l. La cote de la ligne z passant par ce point de tangence donne la réponse z^*. Au point d'intersection de la tangente avec l'échelle C_1 on lit la réponse C_1^*. On définit en même temps le domaine des valeurs de z dans lequel les valeurs de C_1 sont proches de C_1^*. L'abaque correspond à l'exemple numérique: $A = 3{,}5$; $l = 400$ m; réponses $z^* = 135$ m, $C_1^* = 990$ roubles/h; les valeurs de z comprises entre 130 et 145 m donnent les valeurs de C_1 proches de $C_1^* = 990$ roubles/h.

§ 6.12. Abaque à points alignés pour la formule d'interpolation linéaire successive dans les tableaux à trois entrées

La forme (6.28)

$$t = Auvw + Buv + Cvw + Dwu + Eu + Fv + Gw + H$$

présente un grand intérêt pratique, car elle décrit une *case tabulaire à trois entrées* (cf. tableau 23) pour une fonction $t = F(u, v, w)$ admettant une interpolation linéaire sur chaque variable.

Tableau 23

w	w_1		w_2	
u \ v	u_1	u_2	u_1	u_2
v_1	t_{11}	t_{21}	t'_{11}	t'_{21}
v_2	t_{12}	t_{22}	t_{12}	t'_{22}

La forme (6.28) peut être considérée comme la généralisation de la forme (6.20) qui décrit une case tabulaire à deux entrées dans le cas d'une interpolation linéaire sur chaque variable.

La forme (6.28) peut être représentée par des abaques de divers types. L'abaque le plus simple est à échelles parallèles et à champ binaire rectiligne. Voyons comment se construit un tel abaque. Transcrivons la forme (6.28):

$$u(Avw + Bv + Dw + E) + t(-1) + (Cvw + Fv + Gw + H) = 0.$$

En comparant l'équation obtenue et la forme de Cauchy à champ (6.22), on obtient

$$f_1 = u, \quad f_2 = t, \quad f_{34} = Avw + Bv + Dw + E,$$

$$g_{34} = -1, \quad h_{34} = Cvw + Fv + Gw + H.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle u:

$$x = 0, \quad y = u;$$

échelle t:

$$x = 1, \quad y = t;$$

champ (v, w):

$$x = \frac{1}{Avw + Bv + Dw + E - 1}, \quad y = \frac{-(Cvw + Fv + Gw + H)}{Avw + Bv + Dw + E - 1}.$$

Montrons que le champ (v, w) est composé de familles de droites v et w formant des échelles projectives l'une sur l'autre. En effet, en posant $w = w_0$, on obtient les équations de l'échelle v

$$x = \frac{-1}{\overline{A}v + \overline{B}}, \quad y = \frac{\overline{C}v + \overline{D}}{\overline{A}v + \overline{B}},$$

où $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ et $\overline{D}$ sont des constantes. En éliminant la variable v entre ces équations, on obtient l'équation de la droite

$$y = \left(\frac{\overline{B}\overline{C}}{\overline{A}} - \overline{D}\right) x + \frac{\overline{C}}{\overline{A}}$$

sur laquelle la famille projective de droites parallèles v définies par l'une des équations de l'échelle v détermine une échelle projective. En faisant varier w_0, on obtient une famille d'échelles projectives v. En posant $v = v_0$ dans les équations du champ, on obtiendrait de même la famille des échelles projectives w. Donc le champ (v, w) est effectivement rectiligne et les familles de droites qui le composent déterminent des échelles projectives l'une sur l'autre.

Si l'on dispose du tableau 23, on peut construire l'abaque sans en calculer les éléments. Ceci étant, il n'est pas besoin de calculer les coefficients des équations (6.28) correspondant au tableau 23.

Après avoir tracé les échelles métriques parallèles u et t dans les limites données, construisons les points (v_1, w_1), (v_1, w_2), (v_2, w_1) et (v_2, w_2) par la méthode des intersections, en utilisant les données du tableau 23. En joignant ces points par des droites, on obtient les côtés d'un quadrilatère qui contient le champ binaire (v, w). Ensuite par la méthode qui a servi à représenter l'abaque de la forme (6.20), portons les points intermédiaires sur les côtés de ce quadrilatère. Les droites qui joignent les points de même cote des côtés opposés du quadrilatère sont les droites intermédiaires du champ binaire (v, w).

La projection de l'abaque implique le choix des modules des échelles métriques parallèles u et t, de leur sens, de leur disposition l'une par rapport à l'autre. Si le champ (v, w) est peu maniable, on peut étudier d'autres combinaisons des variables, par exemple les combinaisons (u, w) et (u, v).

Pour appliquer la méthode exposée à la représentation de la relation (6.28) par un abaque sur les intervalles $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$, $w_1 \leqslant w \leqslant w_2$, il faut calculer préalablement une case tabulaire pour cette relation (tableau 23).

Exemple 38. Construisons un abaque du type considéré pour une relation $t = F(u, v, w)$ définie par le tableau 24 et admettant une interpolation linéaire sur toutes les variables.

Tableau 24

Valeurs de t

w	0,20		0,21	
v \ u	700	800	700	800
9 10	1729 1765	1774 1808	1707 1744	1761 1796

Convenons que la variable cherchée t varie par excès sur l'intervalle $1700 \leqslant t \leqslant 1810$. Traçons deux échelles métriques paral-

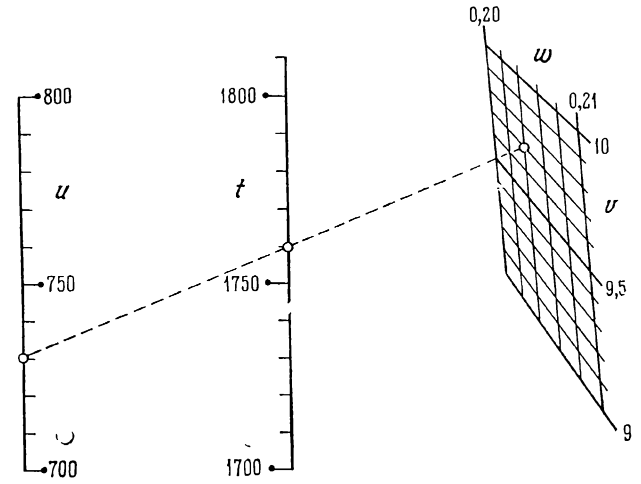


Fig. 141. Abaque à points alignés pour la relation (6.28) donnée par le tableau 24

lèles u et t, de même sens, la première entre 700 et 800, la seconde entre 1700 et 1810. Construisons ensuite par la méthode des intersections les quatre sommets du champ (v, w) et joignons-les par des

droites sur lesquelles on portera les graduations intercalaires par projection d'échelles métriques rectilignes auxiliaires (cf. construction de la figure 137). Menons les droites intermédiares dans le champ binaire. L'abaque ainsi obtenu est représenté sur la figure 141. La droite en pointillé correspond à la solution de l'exemple numérique: $u = 730$, $v = 9{,}7$, $w = 0{,}204$; réponse $t = 1760$.

§ 6.13. Abaque à points alignés pour la forme de Clark

Pour représenter la forme de Clark (6.15)

$$f_1(u)\, f_2(v)\, f_3(w) + [f_1(u) + f_2(v)]\, g_3(w) + h_3(w) = 0$$

introduisons les variables auxiliaires A et B

$$A = f_1 f_2, \qquad (6.45)$$

$$B = f_1 + f_2. \qquad (6.46)$$

On obtient alors l'équation

$$Af_3 + Bg_3 + h_3 = 0, \qquad (6.47)$$

qui est de la forme de Cauchy (6.14). Elle peut être représentée par un abaque à échelles A et B, métriques et parallèles et à échelle w curviligne.

Dans les équations (6.45) et (6.46), on considère les fonctions f_1 et f_2 comme des variables indépendantes et on suppose qu'elles sont racines de l'équation du second degré

$$f^2 - Bf + A = 0.$$

Mettons cette équation sous la forme

$$A \cdot 1 + B(-f) + f^2 = 0. \qquad (6.48)$$

Fig. 142. Schéma d'un abaque à points alignés pour le système d'équations (6.45), (6.46), (6.47)

L'équation (6.48) est de la forme de Cauchy (6.14) et peut être représentée par un abaque dont les échelles A et B sont parallèles et métriques et dont l'échelle f admet pour support une conique. La droite résolvante coupe l'échelle f en deux points f_1 et f_2. Prenant en considération le fait que $f_1 = f_1(u)$, $f_2 = f_2(v)$, on peut, au lieu de l'échelle f, construire les échelles u et v. Elles auront un support commun, en l'occurrence une conique.

Superposant les deux abaques de telle sorte que les échelles A et B coïncident, on obtient un abaque dans lequel le système d'équations (6.45), (6.46) et (6.47) se résout par une seule application de la règle. Le schéma est représenté sur la figure 142. Les équations des éléments de l'abaque de ce système d'équations renfermant les paramètres de transformation s'écrivent:

échelle A:

$$x = 0, \quad y = m(A - a);$$

échelle B:

$$x = H, \quad y = n(B - b);$$

échelle u:

$$x = \frac{-Hmf_1}{n - mf_1}, \quad y = \frac{-mn(a - bf_1 + f_1^2)}{n - mf_1};$$

échelle v:

$$x = \frac{-Hmf_2}{n - mf_2}, \quad y = \frac{-mn(a - bf_2 + f_2^2)}{n - mf_2};$$

échelle w:

$$x = \frac{Hmg_3}{nf_3 + mg_3}, \quad y = \frac{-mn(af_3 + bg_3 + h_3)}{nf_3 + mg_3}.$$

La projection de l'abaque consiste à choisir les paramètres H, m, n, a et b. Une fois les paramètres déterminés, on calcule et on construit l'abaque. Les échelles auxiliaires A et B ne sont pas portées sur l'abaque.

Si dans les équations précédentes on pose $H = m = n = 1$, $a = b = 0$ et l'on néglige les équations des échelles auxiliaires A et B, on obtient les équations suivantes des éléments de l'abaque de la forme de Clark:

échelle u:

$$x = \frac{-f_1}{1 - f_1}, \quad y = \frac{-f_1^2}{1 - f_1};$$

échelle v:

$$x = \frac{-f_2}{1 - f_2}, \quad y = \frac{-f_2^2}{1 - f_2};$$

échelle w:

$$x = \frac{g_3}{f_3 + g_3}, \quad y = \frac{-h_3}{f_3 + g_3}.$$

D'où l'on déduit l'équation de Soreau pour la forme de Clark

$$\begin{vmatrix} \frac{-f_1}{1-f_1} & \frac{-f_1^2}{1-f_1} & 1 \\ \frac{-f_2}{1-f_2} & \frac{-f_2^2}{1-f_2} & 1 \\ \frac{g_3}{f_3+g_3} & \frac{-h_3}{f_3+g_3} & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.49)$$

L'équation (6.49) peut prendre une forme plus simple. En effet, si l'on effectue le changement de coordonnées

$$x' = \frac{x}{x-1}, \quad y' = \frac{y}{x-1},$$

les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle u:

$$x' = f_1, \quad y' = f_1^2;$$

échelle v:

$$x' = f_2, \quad y' = f_2^2;$$

échelle w:

$$x' = -\frac{g_3}{f_3}, \quad y' = \frac{h_3}{f_3}.$$

De là il résulte que les supports des échelles u et v sont les paraboles

$$y' = x'^2.$$

L'équation de Soreau pour la forme de Clark s'écrit désormais

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_1^2 & 1 \\ f_2 & f_2^2 & 1 \\ -\frac{g_3}{f_3} & \frac{h_3}{f_3} & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.50}$$

Exemple 39. Ramenons la forme (6.11) à la forme de Clark et trouvons pour elle l'équation de Soreau (6.49).

Mettons l'équation (6.11) sous la forme de Clark

$$f_1 f_2 \cdot 0 + (f_1 + f_2) \cdot 1 + (-f_3) = 0.$$

L'équation de Soreau s'écrit

$$\begin{vmatrix} \frac{-f_1}{1-f_1} & \frac{-f_1^2}{1-f_1} & 1 \\ \frac{-f_2}{1-f_2} & \frac{-f_2^2}{1-f_2} & 1 \\ 1 & f_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple 40. Ramenons la forme (6. 12) à la forme de Clark et trouvons pour elle l'équation de Soreau (6.50).

Mettons la forme (6.12) sous la forme de Clark

$$f_2 (-f_3) \cdot 1 + (f_2 - f_3) \cdot 0 + f_1 = 0.$$

L'équation de Soreau s'écrit donc

$$\begin{vmatrix} f_2 & f_2^2 & 1 \\ -f_3 & f_3^2 & 1 \\ 0 & f_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemple 41. Ramenons l'équation (6.13) à la forme de Clark et trouvons pour elle l'équation (6.50).

Mettons l'équation (6.13) sous la forme de Clark

$$f_1 f_2 (-f_3) + (f_1 + f_2)\cdot 1 + f_3 = 0.$$

L'équation de Soreau s'écrit donc:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_1^2 & 1 \\ f_2 & f_2^2 & 1 \\ \frac{1}{f_3} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La forme de Clark à champ (6.24)

$$f_1(u)\, f_2(v)\, f_{34}(w, t) + [f_1(u) + f_2(v)]\, g_{34}(w, t) + h_{34}(w, t) = 0$$

est représentée par un abaque de façon analogue. On obtient les

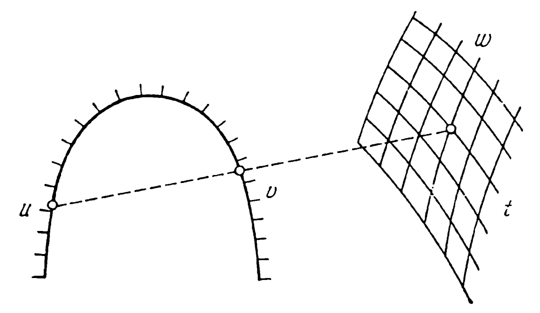


Fig. 143. Schéma d'un abaque à points alignés pour la forme $f_1f_2f_{34}+(f_1+f_2)\,g_{34}+$ $+\,h_{34}=0$

équations des éléments de l'abaque de cette forme en remplaçant f_3, g_3 et h_3 par f_{34}, g_{34} et h_{34} dans les équations précédentes de la forme de Clark. La figure 143 représente l'abaque de la forme de Clark à champ.

§ 6.14. Abaque à points alignés pour une équation complète d'ordre nomographique quatre

L'équation complète d'ordre nomographique quatre (6.21) peut se mettre sous la forme plus concise

$$L_{12} f_3 + M_{12} g_3 + N_{12} h_3 = 0, \qquad (6.51)$$

où

$$L_{12} = l_0 f_1 f_2 + l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3,$$
$$M_{12} = m_0 f_1 f_2 + m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3,$$
$$N_{12} = n_0 f_1 f_2 + n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3.$$

Pour représenter l'équation (6.51) par un abaque mettons-la sous la forme

$$\frac{L_{12}}{N_{12}} \cdot \frac{f_3}{h_3} + \frac{M_{12}}{N_{12}} \cdot \frac{g_3}{h_3} + 1 = 0$$

et posons

$$\frac{L_{12}}{N_{12}} = \alpha, \tag{6.52}$$

$$\frac{M_{12}}{N_{12}} = \beta. \tag{6.53}$$

On obtient alors l'équation

$$\frac{f_3}{h_3} \alpha + \frac{g_3}{h_3} \beta + 1 = 0, \tag{6.54}$$

qui est linéaire en les variables auxiliaires α et β.

Eliminons d'abord f_2 et ensuite f_1 entre les équations (6.52) et (6.53). Toutes réductions faites, on obtient les équations linéaires en α et β

$$\frac{F_1}{H_1} \alpha + \frac{G_1}{H_1} \beta + 1 = 0 \tag{6.55}$$

et

$$\frac{F_2}{H_2} \alpha + \frac{G_2}{H_2} \beta + 1 = 0, \tag{6.56}$$

où

$$F_1 = (m_1 n_0 - m_0 n_1) f_1^2 + \\ + (m_1 n_2 - m_2 n_1 + m_3 n_0 - m_0 n_3) f_1 + m_3 n_2 - m_2 n_3 ;$$

$$G_1 = (l_0 n_1 - l_1 n_0) f_1^2 + (l_2 n_1 - l_1 n_2 + l_0 n_3 - l_3 n_0) f_1 + l_2 n_3 - l_3 n_2 ;$$

$$H_1 = (l_1 m_0 - l_0 m_1) f_1^2 + (l_3 m_0 - l_0 m_3 + l_1 m_2 - l_2 m_1) f_1 + m_2 l_3 - m_3 l_2 ;$$

$$F_2 = (m_2 n_0 - m_0 n_2) f_2^2 + \\ + (m_3 n_0 + m_2 n_1 - m_1 n_2 - m_0 n_3) f_2 + m_3 n_1 - m_1 n_3 ;$$

$$G_2 = (l_0 n_2 - l_2 n_0) f_2^2 + (l_0 n_3 + l_1 n_2 - l_2 n_1 - l_3 n_0) f_2 + l_1 n_3 - l_3 n_1 ;$$

$$H_2 = (l_2 m_0 - l_0 m_2) f_2^2 + (l_2 m_1 + l_3 m_0 - l_0 m_3 - l_1 m_2) f_2 + l_3 m_1 - l_1 m_3 .$$

En éliminant les variables α et β entre les équations (6.54), (6.55) et (6.56), on obtient l'équation de Soreau sous la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{F_1}{H_1} & \frac{G_1}{H_1} & 1 \\ \frac{F_2}{H_2} & \frac{G_2}{H_2} & 1 \\ \frac{f_3}{h_3} & \frac{g_3}{h_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle u:

$$x=\frac{F_1}{H_1}, \quad y=\frac{G_1}{H_1};$$

échelle v:

$$x=\frac{F_2}{H_2}, \quad y=\frac{G_2}{H_2};$$

échelle w:

$$x=\frac{f_3}{h_3}, \quad y=\frac{g_3}{h_3}.$$

Les échelles u et v de l'abaque seront portées dans le cas général par des coniques, i.e. on aura un abaque du type de Clark. La conique peut, dans un cas particulier, dégénérer en un couple de droites et on obtient alors un abaque du type de Cauchy.

Exemple 42. Ecrivons l'équation de Soreau pour la forme (6.20) en la considérant comme un cas particulier de l'équation (6.21).

Mettons l'équation (6.20) sous la forme

$$(-1)\, w + (Auv)\cdot 1 + (Bu + Cv + D)\cdot 1 = 0$$

et comparons avec la forme (6.51). Posons $f_1 = u$; $f_2 = v$; $f_3 = w$; $g_3 = h_3 = 1$; $L_{12} = -1$; $M_{12} = Auv$; $N_{12} = Bu + Cv + D$. D'où il suit que $l_0 = l_1 = l_2 = 0$; $l_3 = -1$; $m_0 = A$; $m_1 = m_2 = m_3 = 0$; $n_0 = 0$; $n_1 = B$; $n_2 = C$; $n_3 = D$. Les fonctions F_1, G_1, H_1, F_2, G_2, H_2 s'écriront

$$F_1 = -ABu^2 - ADu; \quad G_1 = C; \quad H_1 = -Au;$$
$$F_2 = -ACv^2 - ADv; \quad G_2 = B; \quad H_2 = -Av.$$

L'équation de Soreau s'écrira

$$\begin{vmatrix} Bu+D & -\frac{C}{Au} & 1 \\ Cv+D & -\frac{B}{Av} & 1 \\ w & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que les échelles u et v ont une conique pour support et que l'échelle w est rectiligne.

L'équation complète d'ordre nomographique quatre à champ (6.27) peut être représentée de façon analogue par un abaque. Pour obtenir les équations des éléments de l'abaque de cette équation, il faut remplacer les fonctions f_3, g_3 et h_3 d'une variable par les fonctions f_{34}, g_{34} et h_{34} de deux variables dans les équations des éléments de l'abaque de la forme (6.21). L'abaque de l'équation complète d'ordre nomographique quatre à champ est représenté pour le cas général sur la figure 143.

Exemple 43. Trouvons l'équation de Soreau pour la forme (6. 28) en l'envisageant comme un cas particulier de l'équation (6.27).
Mettons l'équation (6.28) sous la forme

$$-t + (Auv + Du + Cv + G)\,w + (Buv + Eu + Fv + H)\cdot 1 = 0$$

et comparons avec l'équation (6.27). Il vient $f_{34} = t$; $g_{34} = w$; $h_{34} = 1$; $f_1 = u$; $f_2 = v$; $l_0 = l_1 = l_2 = 0$; $l_3 = -1$; $m_0 = A$; $m_1 = D$; $m_2 = C$; $m_3 = G$; $n_0 = B$; $n_1 = E$; $n_2 = F$; $n_3 = H$. L'équation de Soreau s'écrit

$$\begin{vmatrix} \frac{F_1}{H_1} & \frac{G_1}{H_1} & 1 \\ \frac{F_2}{H_2} & \frac{G_2}{H_2} & 1 \\ t & w & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$F_1 = (DB - AE)\,u^2 + (DF - CE + GB - AH)\,u + GF - CH;$$

$$G_1 = Bu + F; \quad H_1 = -Au - C;$$

$$F_2 = (CB - AF)\,v^2 + (GB + CE - DF - AH)\,v + GE - DH;$$

$$G_2 = Bv - E; \quad H_2 = -Av - D.$$

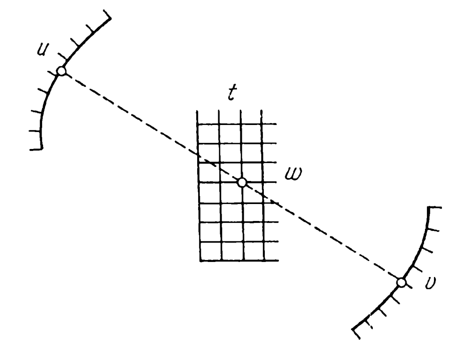


Fig. 144. Schéma d'un abaque à points alignés pour la forme (6.28) envisagée comme un cas particulier de la forme (6.27)

L'abaque est représenté sur la figure 144. Les échelles u et v ont pour support une conique, le champ (t, w) est constitué de familles régulières de droites parallèles formant un réseau orthogonal.

§ 6.15. Abaque à points alignés pour la forme de Soreau

Pour représenter la forme de Soreau (6.16)

$$f_3(w) = \frac{f_1(u) + f_2(v)}{g_1(u) + g_2(v)}$$

par un abaque, transcrivons-la comme suit

$$f_3 g_1 - f_1 = -f_3 g_2 + f_2$$

et introduisons la variable auxiliaire B

$$f_3 g_1 - f_1 = -f_3 g_2 + f_2 = B.$$

Les équations obtenues peuvent encore s'écrire

$$\left.\begin{aligned} f_3 g_1 + B(-1) - f_1 = 0, \\ f_2 g_2 + B \cdot 1 - f_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.57)$$

Les équations (6.57) sont un cas particulier du système de deux équations du type de Cauchy

$$\left.\begin{aligned} F_1 F_3 + F_2 G_3 + H_3 = 0, \\ F_1 F_4 + F_2 G_4 + H_4 = 0, \end{aligned}\right\}$$

qui se représente par un abaque à simple alignement. Ici : $F_1 = f_3$; $F_2 = B$; $F_3 = g_1$; $G_3 = -1$; $H_3 = -f_1$; $F_4 = g_2$; $G_4 = 1$; $H_4 = -f_2$.

Les équations des éléments de l'abaque du système (6.57), contenant les paramètres de transformation, s'écrivent :

échelle w:

$$x = 0, \quad y = m(f_3 - a);$$

échelle B:

$$x = H, \quad y = n(B - b);$$

échelle u:

$$x = \frac{-Hm}{ng_1 - m}, \quad y = \frac{-mn(ag_1 - b - f_1)}{mg_1 - m};$$

échelle v:

$$x = \frac{Hm}{ng_2 + m}, \quad y = \frac{-mn(ag_2 + b - f_2)}{ng_2 + m}.$$

La projection de l'abaque consiste une fois encore à projeter deux abaques à échelles parallèles du type de Cauchy et à déterminer H, m, n, a et b. Lorsqu'on a calculé les paramètres, on écarte l'échelle auxiliaire B. Le schéma définitif de l'abaque est celui de la figure 145.

11—049

Trouvons maintenant les équations des éléments de l'abaque. Posons $m = n = H = 1$, $a = b = 0$. Remplaçons par ailleurs les fonctions g_1 et g_2 par $(g_1 + 1)$ et $(g_2 - 1)$. Cette substitution laisse invariante la somme $g_1 + g_2$ figurant au dénominateur de la forme de Soreau (6.16) ainsi que la forme

$$f_3 = \frac{f_1 + f_2}{(g_1 + 1) + (g_2 - 1)}.$$

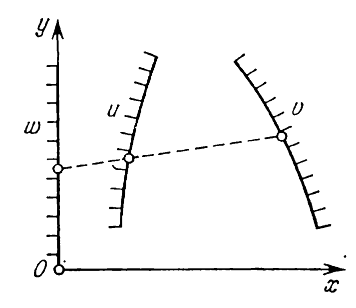


Fig. 145. Schéma d'un abaque à points alignés pour la forme $f_3 = \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent :

échelle w :

$$x = 0, \quad y = f_3;$$

échelle u :

$$x = -1/g_1, \quad y = f_1/g_1;$$

échelle v :

$$x = 1/g_2, \quad y = f_2/g_2.$$

L'équation de Soreau correspondant à la forme de Soreau (6.16) s'écrit donc

$$\begin{vmatrix} 0 & f_3 & 1 \\ -\frac{1}{g_1} & \frac{f_1}{g_1} & 1 \\ \frac{1}{g_2} & \frac{f_2}{g_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les formes de Soreau à un et deux champs (6.25) et (6.26) se représentent de façon analogue par un abaque. Pour obtenir les équations des éléments des abaques, il faut remplacer les fonctions d'une variable par des fonctions de deux variables dans les équations précédentes.

§ 6.16. Abaques composés élémentaires à points alignés

Dans la pratique on rencontre généralement des équations à plusieurs variables. Elles peuvent être représentées parfois par des *abaques composés à plusieurs alignements.* Pour les construire, on essaye, en introduisant des variables auxiliaires I, II, III, etc., de décomposer l'équation donnée en équations représentables par des abaques à simple alignement. Ensuite on construit les abaques de telle sorte que les échelles des variables auxiliaires viennent en coïncidence. Ces échelles sont rendues *muettes* (i.e. on ne dessine que leurs supports). Examinons quelques cas typiques. Au chapitre 8 on verra d'autres cas d'abaques à points alignés.

Exemple 44. Soit à représenter la forme (6.33)

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4$$

par un abaque.

En introduisant la variable auxiliaire I, on décompose l'équation (6.33) en les deux équations

$$f_1 + f_2 = \mathrm{I} \quad \text{et} \quad f_3 + f_4 = \mathrm{I}$$

qui appartiennent à la forme (6.11). Représentons chacune de ces équations par un abaque à trois échelles parallèles telles que les

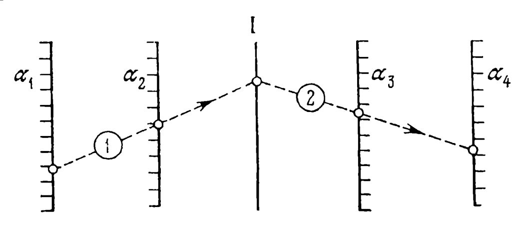


Fig. 146. Schéma d'un abaque composé à points alignés pour la forme $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$

échelles I soient identiques dans les deux abaques. Ensuite superposons les deux abaques de telle sorte que les échelles I coïncident. On obtient l'abaque composé de la figure 146.

Exemple 45. Soit à représenter la forme (6.34)

$$f_1 + f_2 = f_3 f_4.$$

Fig. 147. Schéma d'un abaque à points alignés composé pour la forme $f_1 + f_2 = f_3 f_4$

En introduisant la variable auxiliaire I, on décompose l'équation (6.34) en les deux équations suivantes

$$f_1 + f_2 = \mathrm{I}, \qquad f_3 f_4 = \mathrm{I}$$

appartenant respectivement aux formes canoniques (6.11) et (6.12). Représentons la première de ces équations par un abaque à trois

échelles parallèles et la seconde par un abaque à deux échelles parallèles et une oblique de telle sorte que les échelles I soient identiques dans les deux abaques. Superposons les abaques de telle sorte que les échelles I viennent en coïncidence. On obtient l'abaque composé de la figure 147.

Exemple 46. Soit à représenter la forme (6.35)

$$f_1 + f_2 + f_3 = f_4 f_5$$

par un abaque.

En introduisant les variables auxiliaires I et II, on décompose l'équation (6.35) en les trois équations suivantes

$$f_1 + f_2 = \mathrm{I}, \quad \mathrm{I} + f_3 = \mathrm{II}, \quad \mathrm{II} = f_4 f_5.$$

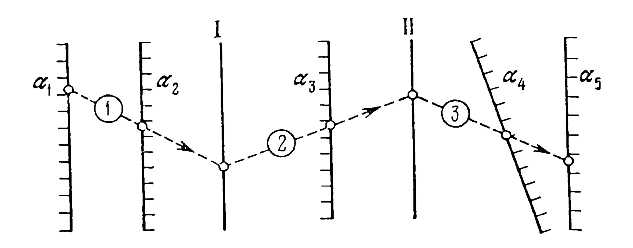


Fig. 148. Schéma d'un abaque à points alignés composé pour la forme $f_1 + f_2 + f_3 = f_4 f_5$

Les deux premières équations sont de la forme (6.11), la troisième de la forme (6.12). L'abaque est représenté sur la figure 148.

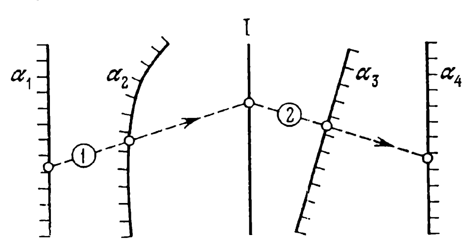


Fig. 149. Schéma d'un abaque à points alignés composé pour la forme $f_1 f_2 + g_2 = f_3 f_4$

Exemple 47. Soit à représenter la forme (6.36)

$$f_1 f_2 + g_2 = f_3 f_4$$

par un abaque.

En introduisant la variable auxiliaire I, on décompose l'équation (6.36) en les deux équations suivantes

$$f_1 f_2 + g_2 = \mathrm{I}, \quad \mathrm{I} = f_3 f_4$$

qui sont respectivement des formes canoniques (6.14) et (6.12). L'abaque composé est représenté sur la figure 149.

§ 6.17. Abaques à points alignés à échelle binaire

Dans la pratique on se sert très souvent des *abaques composés à points alignés* et des *abaques à entrecroisement.* Soit l'équation à quatre variables

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ F[f_{34}(w,\ t)] & G[f_{34}(w,\ t)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.58)$$

En introduisant la variable auxiliaire α, on décompose l'équation (6.58) en les deux équations suivantes

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ F(\alpha) & G(\alpha) & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (6.59)$$

$$\alpha = f_{34}(w,\ t). \qquad (6.60)$$

L'équation (6.59) peut être représentée par un abaque à échelles à points alignés et l'équation (6.60) par un abaque à entrecroisement.

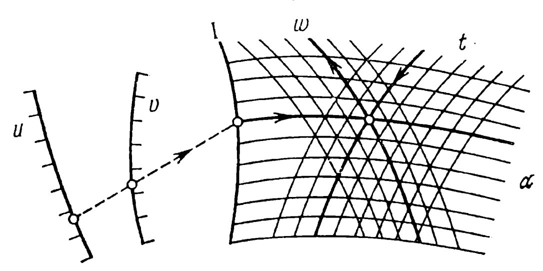


Fig. 150. Schéma d'un abaque à points alignés à échelle binaire pour l'équation (6.58)

La famille α étant arbitraire dans l'abaque à entrecroisement, on peut la choisir telle que les lignes passant par les points de l'échelle α de l'abaque à points alignés aient les mêmes cotes que les points de l'échelle α. On peut alors les assembler en un abaque composé dont le schéma est représenté sur la figure 150.

L'abaque obtenu s'appelle *abaque à points alignés à échelle binaire*. En toute rigueur, seule l'échelle α est binaire, car en vertu de l'équation (6.60) ses points sont déterminés par les paramètres w et t. Mais il est d'usage d'inclure la notion d'abaque à entrecroisement

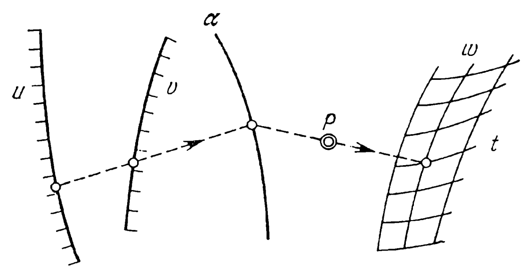


Fig. 151. Schéma d'un abaque composé à points alignés pour l'équation (6.58) constitué de trois échelles, d'un point fixe et d'un champ binaire, liés par un double alignement

dans celle d'échelle binaire. La famille de lignes α peut être rendue muette. L'échelle binaire est désignée par I.

En guise de familles de lignes α et w, on prend souvent des familles de droites parallèles formant un réseau orthogonal.

Si pour la famille de lignes α on prend un faisceau de droites, dont on ne représente que le centre P sur la figure, on obtient un *abaque composé à points alignés à double alignement* qui est représenté sur la figure 151.

Les formes suivantes

$$f_1 + f_2 = f_{34}, \tag{6.61}$$

$$f_{12} f_4 + f_3 g_4 + h_4 = 0, \tag{6.62}$$

$$f_{12} f_5 + f_{34} g_5 + h_5 = 0, \tag{6.63}$$

$$f_{12} f_{45} + f_3 g_{45} + h_{45} = 0, \tag{6.64}$$

$$f_{12} f_{56} + f_{34} g_{56} + h_{56} = 0, \tag{6.65}$$

$$f_{12} = \frac{f_3 + f_4}{g_3 + g_4}. \tag{6.66}$$

qui sont d'un usage fréquent peuvent être représentées par des abaques à points alignés à échelles binaires.

A signaler que les formes (6.58), (6.61) à (6.66) peuvent être représentées par des abaques simples d'autres types. Les formes (6.58), (6.61), (6.62) et (6.66) peuvent être représentées par exemple par des abaques simples à points alignés composés de deux champs binaires et d'un point fixe à simple alignement, puisque ces formes sont des cas particuliers de la forme $\varphi(u, v) = \psi(w, t)$, laquelle est susceptible d'être représentée par un abaque de ce type (cf. § 8.1).

CHAPITRE 7

TRANSFORMATION PROJECTIVE D'ABAQUES

§ 7.1. Transformation projective générale d'abaques

Si dans les formules (5.3) qui établissent un lien entre les coordonnées d'un point arbitraire de l'abaque à points alignés de la relation (4.8) avant et après l'introduction des paramètres de transformation on omet les barres qui surmontent les coordonnées, on obtient

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}. \qquad (7.1)$$

On suppose que les coefficients des équations (7.1) vérifient la condition (4.13).

On supposera que l'ancien système de coordonnées xOy et le nouveau $x'O'y'$ coïncident et forment un seul système. Les formules (7.1) définissent alors une transformation du plan en lui-même. A tout point A de coordonnées x et y ces formules associent un point A' du même plan, de coordonnées x' et y'. La figure 152 représente les systèmes de coordonnées rectangulaires coïncidants, les points A $(x; y)$ et A' $(x'; y')$.

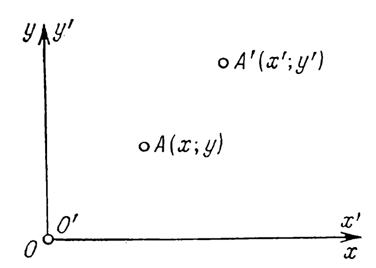


Fig. 152. Systèmes de coordonnées rectangulaires superposés xOy et $x'O'y'$, un point A $(x; y)$ et son homologue A' $(x'; y')$

Les formules 7.1 sont appelées *formules de transformation projective du plan*. En géométrie projective, on démontre que si on projette un plan donné à partir d'un centre arbitraire sur un autre plan, le nouveau plan obtenu sur un autre à partir d'un nouveau centre et ainsi de suite, et, enfin, le dernier plan sur le plan initial à partir d'un centre quelconque, les coordonnées de ce dernier avant et après la transformation seront liées par la formule 7.1.

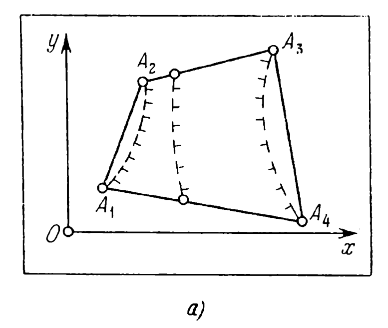
Une importante propriété de la transformation projective générale est qu'elle applique une droite sur une droite. C'est pourquoi un abaque à points alignés le restera par cette transformation, puisque celle-ci conserve l'alignement.

Les huit paramètres essentiels figurant dans les formules de transformation (7.1) étant arbitraires, on peut transformer quatre d'entre eux non alignés trois à trois en quatre points arbitraires du plan non alignés trois à trois.

Il est recommandé d'utiliser cette méthode de donnée de la transformation projective lorsqu'on veut que l'abaque occupe toute la partie utile du dessin. Pour cela on comprend la variante initiale de l'abaque dans un quadrilatère convexe $A_1A_2A_3A_4$ convenable et on l'applique sur le rectangle donné $A_1'A_2'A_3'A_4'$. Cet artifice risque toutefois de nuire à la graduation des échelles ou à l'allure des champs binaires. Or, on ne peut se faire une idée définitive de la maniabilité de l'abaque qu'après avoir déterminé les paramètres de transformation, calculé et construit cet abaque.

Exemple 48. Transformons l'abaque de la figure 153, *a* de telle sorte qu'il occupe un rectangle de dimensions $L \times H$ sur la figure 153, *b*.

Choisissons sur la figure 153, *a* les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 du quadrilatère convexe $A_1A_2A_3A_4$ qui contiendra l'abaque. Appliquons le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ sur le rectangle $A_1'A_2'A_3'A_4'$, dont deux



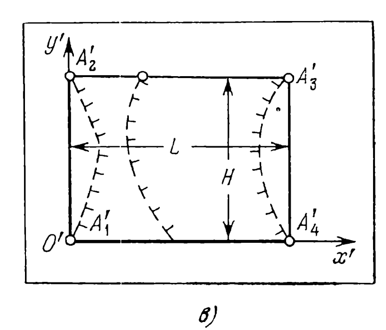


Fig. 153. Transformation du quadrilatère limite en un rectangle dont deux côtés coïncident avec les axes de coordonnées: *a*) quadrilatère limite $A_1A_2A_3A_4$; *b*) rectangle $A_1'A_2'A_3'A_4'$

côtés sont confondus avec les axes de coordonnées. Les coordonnées des points avant et après la transformation sont indiquées dans le tableau 25.

En portant les valeurs des coordonnées du tableau 25 dans les équations (7.1), on obtient un système de huit équations pour le calcul des paramètres de transformation:

$$0=\frac{a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13}}{a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}}, \quad 0=\frac{a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23}}{a_{31}x_1+a_{32}y_1+a_{33}},$$

$$0=\frac{a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13}}{a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}}, \quad H=\frac{a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23}}{a_{31}x_2+a_{32}y_2+a_{33}},$$

$$L=\frac{a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13}}{a_{31}x_3+a_{32}y_3+a_{33}},\quad H=\frac{a_{21}x_3+a_{22}y_3+a_{23}}{a_{31}x_3+a_{32}y_3+a_{33}},$$

$$L=\frac{a_{11}x_4+a_{12}y_4+a_{13}}{a_{31}x_4+a_{32}y_4+a_{33}},\quad 0=\frac{a_{21}x_4+a_{22}y_4+a_{23}}{a_{31}x_4+a_{32}y_4+a_{33}}.$$

Tableau 25

Fig. 153, *a*			Fig. 153, *b*		
Point	x	y	Point	x'	y'
A_1	x_1	y_1	A'_1	0	0
A_2	x_2	y_2	A'_2	0	H
A_3	x_3	y_3	A'_3	L	H
A_4	x_4	y_4	A'_4	L	0

Dans la pratique il est plus commode de se servir d'une méthode particulière de transformation des abaques, découlant de la méthode de transformation des abaques à échelles parallèles pour des équations du type de Cauchy. Prenons (cf. § 6.11) un point arbitraire du champ binaire (w, t) et écrivons ses équations dans le système de coordonnées xOy pour $m=n=1$, $a=b=0$ et pour une certaine valeur de H, et les équations du même point dans le système $x'O'y'$ après introduction des paramètres m, n, a et b et le même H. On obtient

$$x=\frac{Hg_{34}}{f_{34}+g_{34}},\quad y=\frac{-h_{34}}{f_{34}+g_{34}}; \tag{7.2}$$

$$x'=\frac{mHg_{34}}{nf_{34}+mg_{34}},\quad y'=\frac{-mn\,(af_{34}+bg_{34}+h_{34})}{nf_{34}+mg_{34}}. \tag{7.3}$$

Dans les formules (7.3) on supposera que m et n sont des nombres algébriques. Des formules (7.2) et (7.3) on déduit les relations suivantes entre les nouvelles et les anciennes coordonnées:

$$x'=\frac{mHx}{(m-n)\,x+nH},\quad y'=\frac{(a-b)\,mnx+mnHy-amn\,H}{(m-n)\,x+nH}. \tag{7.4}$$

Les formules (7.4) sont un cas particulier des formules (7.1). Ce qu'il y a d'important dans ces formules, c'est que les cinq paramètres qui y figurent admettent une interprétation géométrique simple qui a été donnée pendant la construction des abaques à points alignés du type de Cauchy à échelles parallèles.

Les formules (7.4) peuvent être appliquées à la transformation de tout abaque à points alignés. La méthode à suivre est très simple. Après avoir construit l'esquisse de l'abaque, traçons deux droites

parallèles à une distance H l'une de l'autre. Faisons coïncider l'axe $\overline{Oy}$ du nouveau système de coordonnées $\overline{xOy}$ avec l'une des droites tracées. Choisissons ensuite les paramètres m, n, a et b comme dans les abaques à points alignés du type de Cauchy à échelles parallèles. Supposons par exemple que pour améliorer l'abaque (cf. fig. 154) il faille appliquer le segment A_1A_2 sur $A'_1A'_2$ et le segment A_3A_4 sur $A'_3A'_4$.

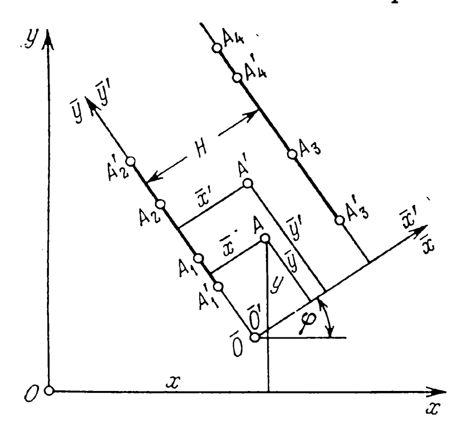


Fig. 154. Transformation utilisée dans la construction d'abaques à points alignés pour la forme de Cauchy à échelles parallèles: le segment A_1A_2 se transforme en le segment $A'_1A'_2$, le segment A_3A_4 en le segment $A'_3A'_4$

Les paramètres m, n, a et b se déduisent alors du système d'équations

$$\overline{y}'_1 = m(\overline{y}_1 - a),$$
$$\overline{y}'_2 = m(\overline{y}_2 - a),$$
$$\overline{y}'_3 = n(\overline{y}_3 - b),$$
$$\overline{y}'_4 = n(\overline{y}_4 - b),$$

où $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, $\overline{y}_3$ et $\overline{y}_4$ sont les ordonnées des points A_1, A_2, A_3 et A_4, $\overline{y}'_1$, $\overline{y}'_2$, $\overline{y}'_3$ et $\overline{y}'_4$ celles des points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4.

Reste maintenant à écrire les équations de l'abaque transformé dans le système de coordonnées $\overline{x}'\overline{O}'\overline{y}'$. Utilisons à cet effet les formules

$$\overline{x}' = \frac{mH\overline{x}}{(m-n)\,\overline{x}+nH}, \quad \overline{y}' = \frac{(a-b)\,mn\overline{x}+mnH\overline{y}-amnH}{(m-n)\,\overline{x}+nH},$$

où

$$\overline{x} = A + x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad \overline{y} = B - x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Ici φ est l'angle orienté de rotation de l'axe Ox (il est positif si la rotation a lieu dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre), A et B les coordonnées du point $\overline{O}$ dans le système de coordonnées xOy.

A titre d'illustration on a représenté sur la figure 154 un point arbitraire A de coordonnées x et y (dans le système de coordonnées xOy) ou $\overline{x}$ et $\overline{y}$ (dans le système $\overline{xOy}$) et le point A' de coordonnées $\overline{x}'$ et $\overline{y}'$ (dans le système $\overline{x}'\overline{O}'\overline{y}'$) image du point A par cette transformation.

Deux cas particuliers de la transformation projective générale présentent un grand intérêt pratique: la *transformation affine* et

l'*homologie*. En appliquant plusieurs fois la transformation affine et l'homologie on peut ramener l'abaque à une forme commode à l'usage. Considérons ces transformations particulières.

§ 7.2. Transformation affine

Si dans les formules (7.1), on pose $a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{33} = 1$, on obtient des relations linéaires renfermant six paramètres

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \qquad (7.5)$$

Les formules (7.5) sont parfois plus pratiques sous la forme

$$x' = a + \mu_x (x + \delta_x y), \quad y' = b + \mu_y (\delta_y x + y). \qquad (7.6)$$

Dans les formules (7.6) les paramètres a, b, μ_x, μ_y, δ_x et δ_y ont une signification géométrique suggestive. La variation des paramètres a et b se traduit par une translation de l'abaque ; celle des paramètres μ_x et μ_y à $\delta_x = \delta_y = 0$, par une contraction ou une élongation de l'abaque dans le sens des axes de coordonnées ; celle des paramètres δ_x et δ_y à valeurs fixes des autres paramètres, par une *translation le long de l'axe Ox et Oy* respectivement.

La translation le long de l'axe Ox est définie par les formules

$$x' = x + \delta_x y, \quad y' = y.$$

Pour $y = 0$, on a $x' = x$. Donc les points de l'axe Ox sont invariants par cette translation. Toute droite passant par un point de l'axe Ox se transforme en une droite passant de nouveau par ce point de l'axe Ox. La figure 155 représente les images A' d'un point A de l'axe Oy et $O'A'$ de la droite OA. La variation du paramètre δ_x entraîne un déplacement du point A' sur une droite parallèle à l'axe Ox, puisque $y = y'$, quant à la droite $O'A'$, image de OA, elle pivotera autour du point $O \equiv O'$. Le déplacement AA' est proportionnel à l'ordonnée du point A, le coefficient de proportionnalité étant le paramètre δ_x.

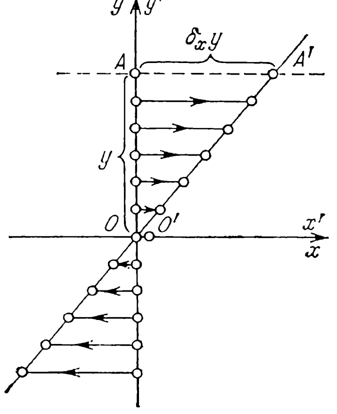


Fig. 155. Translation le long de l'axe Ox

La translation le long de l'axe Oy est définie par les formules

$$x' = x, \quad y' = y + \delta_y x.$$

Pour $x = 0$ on a $y' = y$. Donc cette translation laisse invariants les points de l'axe Oy. Toute droite passant par un point de Oy se transformera en une droite qui passera par le même point. La figure 156

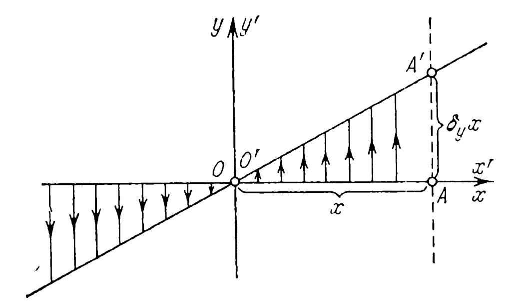


Fig. 156. Translation le long de l'axe Oy

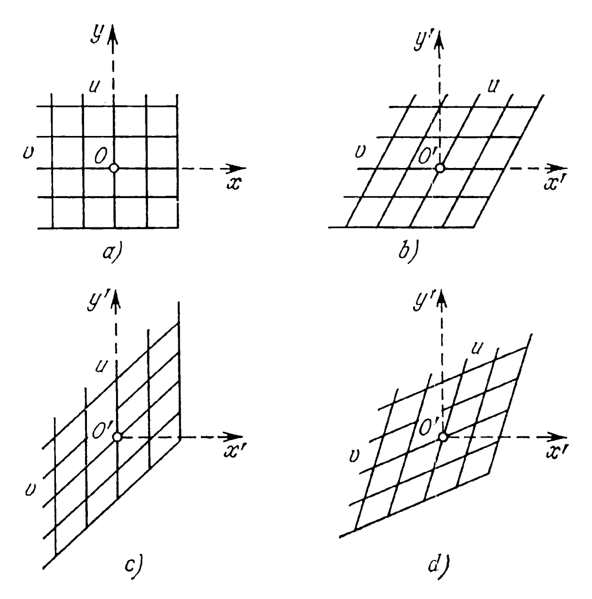


Fig. 157. Translation du champ binaire orthogonal (u, v): *a*) champ de départ (u, v); *b*) champ d'arrivée (u, v) par translation le long de l'axe Ox; *c*) champ d'arrivée (u, v) par translation le long de l'axe Oy; *d*) champ d'arrivée (u, v) après introduction des deux paramètres de translation

représente le point A', image du point A, de l'axe Ox et la droite $O'A'$, image de la droite OA. La variation du paramètre δ_y déplace le point A' sur une droite parallèle à l'axe Oy, puisque $x' = x$, quant à la droite $O'A'$, elle pivotera autour du point $O \equiv O'$. Le déplacement AA' est proportionnel à l'abscisse du point A, le coefficient de proportionnalité étant le paramètre δ_y.

Exemple 49. Considérons la figure 157 qui représente l'effet des paramètres δ_x et δ_y sur la transformation des éléments de l'abaque.

La figure 157, *a* représente un champ orthogonal (u, v) avant la transformation défini par les équations $x = u$ et $y = v$; la figure 157, *b*, le même champ après une translation le long de l'axe des abscisses $(x' = u + \delta_x v,\ y' = v)$; la figure 157, *c* — le résultat de la translation le long de l'axe des ordonnées $(x' = u,\ y' = \delta_y u + v)$; la figure 157, *d* — le résultat de la translation le long de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées $(x' = u + \delta_x v,\ y' = \delta_y u + v)$.

La transformation à six paramètres du plan en lui-même (7.5) ou (7.6) porte le nom de transformation affine. Le trait remarquable de cette transformation est qu'elle conserve le parallélisme des droites. Les six paramètres étant arbitraires, on peut toujours appliquer trois points quelconques non alignés du plan sur trois points quelconques du même plan, non alignés également. En général, deux points de l'abaque sont laissés invariants, quant au troisième, il est choisi de façon à améliorer l'abaque image.

§ 7.3. Propriétés fondamentales de l'homologie

Considérons l'application suivante du plan α sur lui-même. Soit un plan auxiliaire arbitraire α' et deux points quelconques O_1 et O_2, non situés sur ces plans (fig. 158). A partir du point O_1 projetons un point A du plan α sur un point A_1 du plan α'. A partir du point O_2 projetons A_1 du plan α' sur un point A' du plan α.

En effectuant cette opération pour tous les points du plan α, y compris pour les *points à l'infini*, on applique ce plan sur lui-même.

Un *point à l'infini* est défini par une direction. Joindre un point donné à un point à l'infini par une droite revient à mener par ce point une droite parallèle à la direction donnée. Les points à l'infini constituent la *droite* de *l'infini*. C'est l'intersection de tous les plans parallèles à un plan donné.

Cette application conserve l'alignement des points. Donc elle conserve les abaques à points alignés.

On voit sur la figure 158 que dans le plan α sont invariants la droite p d'intersection des plans et le point P où la droite passant par les centres de projection O_1 et O_2 coupe le plan α.

Cette transformation s'appelle *homologie* ou *transformation projective*. La droite invariante p est l'*axe d'homologie*, le point invariant P le *pôle* ou le *centre d'homologie*, les points A et A' des *points homologues*. De la figure 158 il résulte que les points homologues et le centre d'homologie sont alignés.

Considérons un autre exemple d'homologie. Soit donnés deux plans α et α' et un point O extérieur à ces plans (fig. 159). A partir

du centre O projetons les points du plan α sur le plan α', puis amenons les deux plans en coïncidence par rotation autour de leur droite d'intersection p. Cette transformation des points du plan α est une homologie d'axe la droite p et de centre le point en lequel tombent, après coïncidence des plans, leurs points d'intersection avec le rayon passant par p et perpendiculaire au plan bissecteur de α et α'.

L'homologie est définie si l'on connaît l'axe, le centre et deux points homologues. On peut l'effectuer sur un plan sans recourir

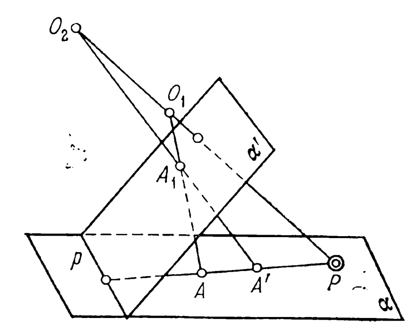


Fig. 158. Application du plan α sur lui-même par projection à partir d'un centre O_1 sur un plan auxiliaire α' et projection de α' à partir d'un centre O_2 sur α

Fig. 159. Application du plan α sur lui-même par projection à partir d'un centre O sur un plan auxiliaire α' et superposition de α et α' par une rotation autour de leur droite d'intersection

à une construction dans l'espace, en utilisant ses propriétés suivantes qui découlent de la figure 158:

1) les droites passant par le centre d'homologie sont invariantes, car elles possèdent deux points invariants: le centre d'homologie et le point d'intersection avec l'axe d'homologie;

2) les droites ne passant pas par le centre d'homologie ne possèdent qu'un point invariant: le point d'intersection avec l'axe d'homologie, c'est pourquoi elles pivotent autour de ce point par cette transformation.

Considérons quelques exemples de résolution de problèmes types que l'on rencontre en se servant de l'homologie.

Exemple 50. On donne l'axe d'homologie p, le centre d'homologie P, deux points homologues A et A', un point B. Construire le point B'.

La figure 160 représente la solution du problème dans le cas où les points A, A' et B ne sont pas alignés. Menons la droite PB et la droite BA. Celle-ci coupe l'axe d'homologie en C. La droite PB est invariante, puisqu'elle passe par le centre d'homologie. La droi-

te CA est appliquée sur CA', car le point C est invariant et l'image de A est A'. Le point B' doit être situé simultanément sur la droite PB et la droite CA', c'est donc leur point d'intersection. Pour construire le point B' il faut donc construire trois droites.

La figure 161 correspond au cas où les points A, A' et B sont alignés. De même que nous avons construit C, non aligné avec A, A' et B, construisons d'abord le point C' et ensuite le point B' en utilisant les points homologues C et C'.

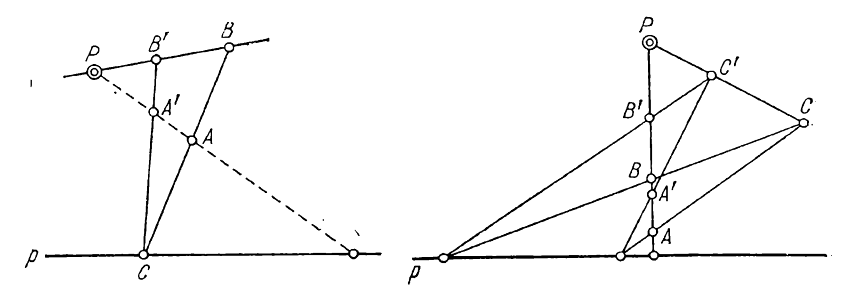


Fig. 160. Construction du point B' dans le cas où les points A, A' et B ne sont pas alignés

Fig. 161. Construction du point B' dans le cas où les points A, A' et B sont alignés

De la figure 158, on déduit que les droites parallèles à l'axe d'homologie se transforment en droites parallèles à l'axe d'homologie. La droite de l'infini se transforme en une droite parallèle à l'axe.

Exemple 51. Soient donnés l'axe d'homologie p, le centre P, les points homologues A et A'. Construire la droite q', image de la droite de l'infini q.

Les figures 162 et 163 représentent les solutions correspondant à deux positions différentes des points homologues A et A'. Choisissons une direction arbitraire non confondue avec celle de AA' et soit B son point à l'infini. Cette direction est indiquée par des flèches sur les figures 162 et 163. Joignons les points P et A par des droites au point à l'infini B, autrement dit menons par ces points des droites parallèles à la direction donnée. Le point B' doit être situé sur la droite menée par le centre d'homologie P dans la direction du point B et sur la droite CA', image de la droite CA. Donc le point B' est situé à la rencontre des droites PB et CA'. En menant par B' une droite parallèle à l'axe d'homologie, on obtient l'image q' de la droite de l'infini q.

Exemple 52. Etant donnés l'axe d'homologie p, le centre P, la droite q', image de la droite de l'infini q, le point A, construire le point A'.

Ce problème est l'inverse du précédent. Les figures 162 et 163 en représentent la solution pour deux positions différentes de la droite q'. Prenons un point quelconque B' sur la droite q'. Joignons P et B' par une droite. A partir du point A traçons une parallèle à PB'.

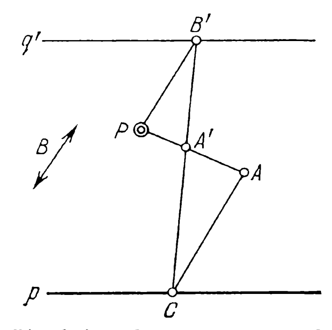


Fig. 162. Construction de la droite q' dans le cas où elle est située au-dessus de l'axe d'homologie

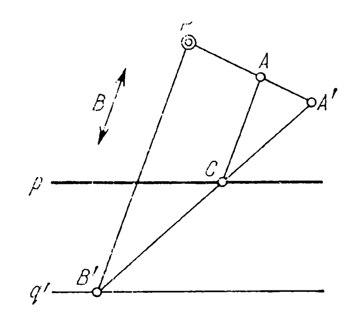


Fig. 163. Construction de la droite q' dans le cas où elle est située au-dessous de l'axe d'homologie

Elle coupera l'axe p en un point C. Le point cherché A' est le point d'intersection des droites AP et CB'.

La position du point A' ne dépend pas du choix du point auxiliaire B' sur la droite q'. En particulier, on peut prendre ce point tel que la droite $B'P$ soit perpendiculaire à l'axe d'homologie.

Fig. 164. Construction du centre d'homologie P dans le cas où sont donnés l'axe d'homologie p et deux couples de points homologues alignés A_1 et A_1', A_2 et A_2'

Exemple 53. Etant donnés l'axe d'homologie p, deux couples de points homologues A_1 et A_1', A_2 et A_2' alignés, on demande le centre d'homologie P.

La figure 164 représente la solution de ce problème. Choisissons un point quelconque B et cherchons son homologue B'. Traçons à cet effet les droites A_1B et A_2B jusqu'à leur intersection C et D avec l'axe d'homologie p. Le point B' n'est autre que le point de rencontre des droites $A_1'C$ et $A_2'D$. Le point cherché P est situé à la fois sur A_1A_1' et BB', c'est donc leur point d'intersection.

En géométrie projective on démontre qu'en utilisant trois fois l'homologie on peut transformer quatre points d'un plan non alignés

trois à trois en quatre points quelconques du même plan non alignés trois à trois. Mais les constructions graphiques qui en résultent sont compliquées. Il est bien plus suggestif de résoudre ce problème comme suit: par la transformation affine (7.6) on applique trois points en trois des points donnés, puis par deux homologies on applique le quatrième point dans le quatrième point donné.

Exemple 54. Exposons la marche à suivre pour résoudre la deuxième partie du problème posé. Supposons (cf. fig. 165) que les points A, B et C occupent déjà la position requise et qu'il faille appliquer D' sur D. Traçons les droites BD' et CD. Elles se coupent en D''. Adoptons la droite AC pour axe d'homologie p_1, le point B pour centre d'homologie, les points D' et D'' pour points homologues. Les points A, B et C sont invariants par cette transformation, quant au point D', son image est le point D''. Adoptons la droite AB pour axe d'homologie p_2, le point C pour centre d'homologie, les points D'' et D qui sont alignés avec C pour points homologues. Les points A, B et C sont invariants par cette transformation, quant au point D'', il se transforme en le point D.

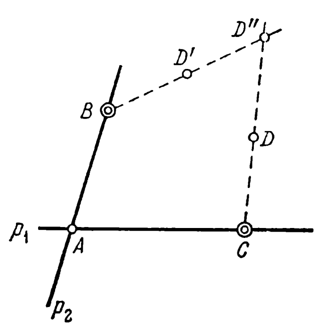


Fig. 165. Utilisation successive de deux homologies pour la transformation de D' en D, les points A, B et C étant fixes

§ 7.4. Déduction des formules d'homologie

La déduction des formules d'homologie repose sur la construction de la figure 162 qui représente la solution de l'exemple 52. On choisira le point B' sur la droite q' de telle sorte que la droite PB' soit perpendiculaire à l'axe d'homologie. Disposons les systèmes superposés de coordonnées xOy et $x'O'y'$ (cf. fig. 166) de telle sorte que l'axe Ox $(O'x')$ vienne en coïncidence avec l'axe d'homologie et l'axe Oy $(O'y')$ passe par le point P. Reprenons ensuite la construction de la figure 162 pour déterminer le point A'. Soient L la distance de P à l'axe d'homologie, l la distance entre

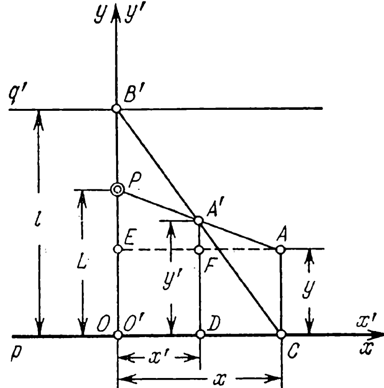


Fig. 166. Figure construite d'après le schéma 162 pour la déduction des formules d'homologie

les parallèles p et q' (si q' est situé en dessous de la droite p, alors $l < 0$). Traçons les droites $AC \parallel Oy$, $A'D \parallel Oy$, $AE \parallel Ox$. Le point A' est alors le point de rencontre des droites $B'C$ et AP. On a $OP = L$; $OB' = l$; $OC = EA = x$; $CA = y$; $OD = x'$; $DA' = y'$; $DC = FA = x - x'$; $FA' = y' - y$; $EP = L - y$. La similitude des triangles $OB'C$ et $DA'C$ entraîne

$$\frac{OB'}{OC} = \frac{DA'}{DC}$$

ou

$$\frac{}{x} = \frac{y'}{x - x'}. \tag{7.7}$$

La similitude des triangles EPA et $FA'A$ donne

$$\frac{EP}{EA} = \frac{FA'}{FA}$$

ou

$$\frac{L - y}{x} = \frac{y' - y}{x - x'}. \tag{7.8}$$

Des équations (7.7) et (7.8) il suit

$$x' = \frac{l - L) x}{l - L + y}, \quad y' = \frac{ly}{l - L + y}. \tag{7.9}$$

Les formules (7.9) qui sont un cas particulier des formules (7.1), sont remarquables par la signification géométrique des paramètres L et l: L est la distance du centre d'homologie à l'axe, l la distance entre l'axe d'homologie et la droite, image de la droite de l'infini. Lorsque $L = 0$ le centre d'homologie est situé sur l'axe d'homologie.

De l'équation (7.7) et de la deuxième équation (7.9), on déduit les formules suivantes pour la détermination du paramètre l en fonction des coordonnées des points homologues A $(x; y)$ et A' $(x'; y')$:

$$l = \frac{xy'}{x - x'}, \tag{7.10}$$

$$= \frac{y' (L - y)}{y' - y}. \tag{7.11}$$

La formule (7.10) n'a pas de sens pour $x = x' = 0$. Dans ce cas il faut se servir de la formule (7.11). Celle-ci n'a pas de sens à son tour pour $y = y' = L$. On utilisera alors la formule (7.10). Les formules (7.10) et (7.11) se complètent. Dans la pratique le paramètre l est plus facile à déterminer graphiquement (cf. exemple 51). Les formules (7.10) et (7.11) doivent être utilisées dans les cas seulement où la droite q' déborde du dessin.

Les formules d'homologie peuvent être déduites sous une forme différente à partir des formules (7.4) en posant $m = 1$, $a = b = 0$.

On obtient

$$x' = \frac{Hx}{(1-n)\,x+nH}, \quad y' = \frac{nHy}{(1-n)\,x+nH}. \qquad (7.12)$$

Montrons que les formules (7.12) définissent effectivement une homologie. Soit $x = 0$. Les formules (7.12) donnent alors $x' = 0$ et $y' = y$, i.e. l'axe Oy est invariant. Donc l'axe d'homologie coïncide avec l'axe Oy. Par ailleurs pour $x = H$ et $y = 0$, on a $x' = H$ et $y' = 0$. Donc le point de coordonnées $x = H$ et $y = 0$ est invariant, i.e. est le centre d'homologie. La figure 167 représente la disposition de l'axe d'homologie p et du centre d'homologie P correspondant aux formules (7.12).

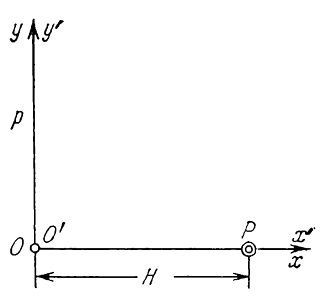


Fig. 167. Disposition de l'axe d'homologie p et du centre d'homologie P correspondant aux formules (7.12)

On remarque qu'à partir des formules (7.12) on peut déduire les formules (7.9) par substitution de y à x, x à y, y' à x', x' à y' et L à H. On obtient

$$x' = \frac{nLx}{(1-n)\,y+nL}$$

$$y' = \frac{Ly}{(1-n)\,y+nL}. \qquad (7.13)$$

En comparant les formules (7.9) et (7.13) on déduit la relation suivante entre les paramètres n, l et L:

$$n = \frac{l-L}{l}.$$

§ 7.5. Méthode d'application de l'homologie

Le problème de l'utilisation de l'homologie se résout après la construction de l'esquisse de l'abaque. Une analyse permet d'en éliminer les défauts. On choisit ensuite sur l'esquisse l'axe d'homologie, le centre et deux points homologues. Puis, par la méthode décrite plus haut (cf. exemple 50), on construit point par point l'esquisse de l'abaque transformé. Si dans l'esquisse initiale les échelles sont rectilignes, la construction est singulièrement simplifiée, car on peut aussitôt tracer la droite qui servira de support à l'échelle transformée. Cette construction définit les paramètres L et l.

Si l'esquisse de l'abaque transformé est satisfaisante, on écrit les nouvelles équations de ses éléments, on les calcule et on trace ensuite un abaque de travail. Pour composer les équations de l'abaque transformé il faut d'abord écrire les équations de ses éléments dans le même système de coordonnées que celui dans lequel sont déduites les formules d'homologie (7.9) (l'axe Ox coïncide avec l'axe d'homologie, l'axe Oy passe par le centre d'homologie) et appliquer

ensuite les formules (7.9) pour les valeurs trouvées des paramètres L et l.

Plus bas on examine quelques exemples de résolution de problèmes types que l'on rencontre lorsqu'on transforme les abaques par homologie.

Exemple 55. On donne l'abaque à échelles parallèles u et v et à échelle curviligne w de la figure 168. Transformons-le de telle sorte que les extrémités inférieures des échelles soient invariantes, que la hauteur L de l'abaque ne varie pas, que l'échelle v reste verticale et ses extrémités invariantes, et, enfin, que l'image du point A soit le point A'.

Pour axe d'homologie p prenons la droite passant par les extrémités inférieures des échelles u, v et w, pour centre d'homologie P

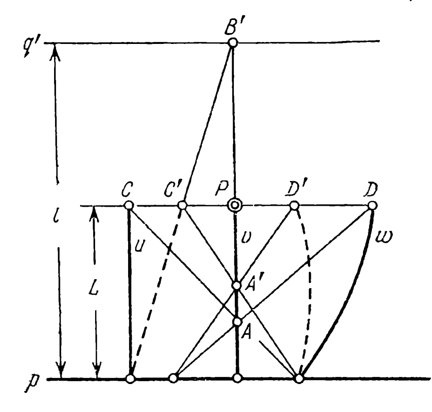


Fig. 168. Application de l'homologie à la modification de la graduation d'une échelle rectiligne moyennant une transformation du point A en A', les extrémités de l'échelle étant invariantes

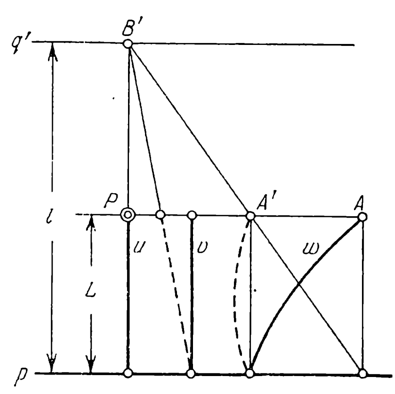


Fig. 169. Application de l'homologie à l'obtention d'un abaque dont les échelles remplissent le rectangle du dessin, moyennant une transformation du point A en A'

l'extrémité supérieure de l'échelle v, pour points homologues les points A et A'. La figure 168 représente la construction des points C' et D', du point B' et de la droite q'. En mesurant la distance entre les droites p et q' on détermine le paramètre l. Les points de l'échelle transformée v se construisent à l'aide des points homologues C et C' ou D et D' (cf. exemple 50). On peut calculer le paramètre l par les formules (7.10) ou (7.11). Sur la figure 168 on voit comment varie l en fonction de la position du point A' et inversement comment A' se déplace lorsque l varie.

Exemple 56. On donne l'abaque à échelles parallèles u et v et à échelle curviligne w de la figure 169. Transformons-le de telle sorte

que les extrémités inférieures des échelles et la hauteur L soient invariantes, que l'échelle u reste verticale, que l'origine et l'extrémité de l'échelle w soient situées sur une droite parallèle aux supports des échelles u et v.

Prenons pour axe d'homologie p la droite qui passe par les extrémités inférieures des échelles u, v et w et pour centre d'homologie P l'extrémité supérieure de l'échelle u, pour points homologues les points A et A', où A est l'extrémité supérieure de l'échelle w, A' le point de rencontre de la droite AP et de la droite passant par l'extrémité inférieure de l'échelle w parallèlement aux supports des échelles u et v. Construisons B' et la droite q' (cf. exemple 51) à l'aide des points homologues A et A'. La droite qui passe par B' et par l'extrémité inférieure de l'échelle v nous donne le nouveau support de cette dernière. Déterminons le paramètre l en mesurant la distance entre les parallèles p et q'. Le paramètre l peut également être déduit à partir des formules (7.10) ou (7.11).

Exemple 57. On donne l'abaque à trois échelles curvilignes u, v et w de la figure 170. Les origines M_1, M_2 et M_3 et les extrémi-

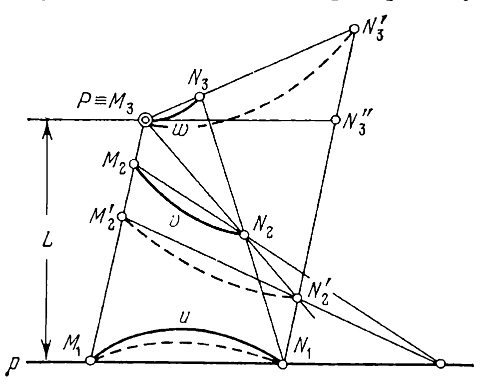


Fig. 170. Application de l'homologie à l'obtention d'un abaque dont les extrémités des échelles sont situées sur des droites parallèles, moyennant une transformation du point N_3 en N_3'

tés N_1, N_2 et N_3 des échelles sont situées sur des droites qui ne sont pas parallèles. Transformons l'abaque de telle sorte que les droites M_1M_3 et N_1N_3 deviennent parallèles, et les points M_3, M_1 et N_1 restent invariants.

Prenons la droite M_1N_1 pour axe d'homologie p, le point M_3 pour centre d'homologie P, les points N_3 et N_3' pour points homologues, N_3' étant le point de rencontre de la droite M_3N_3 et de la droite qui passe par N_1 parallèlement à M_1M_3. La construction des points M_2' et N_2' est représentée sur la figure 170. Le point N_2' est l'inter-

section des droites M_3N_2 et N_1N_3'. On peut construire la droite q' à l'aide des points homologues N_3 et N_3' (cf. exemple 51). Dans ce cas la droite q' et le centre d'homologie P seront situés de part et d'autre de l'axe d'homologie p. Le paramètre l sera donc négatif. On pourra le calculer également par les formules (7.10) et (7.11).

L'abaque transformé qui est représenté sur la figure 170 en pointillé peut encore être transformé sous réserve que les droites M_3N_3' et M_1N_1 soient parallèles et les points M_1, M_3 et N_1 invariants. A cet effet il faut adopter la droite M_1M_3 pour axe d'homologie, le point N_1 pour centre et les points N_3' et N_3'' pour points homologues, le point N_3'' étant le point de rencontre de la droite N_1N_3' avec la droite parallèle à M_1N_1 qui passe par le point M_3.

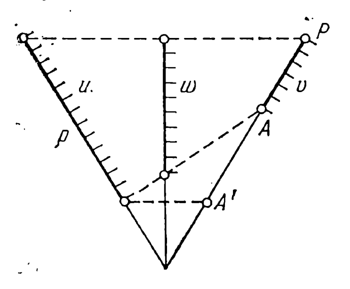


Fig. 171. Obtention d'échelles u et v de même échelon moyennant un choix convenable du centre d'homologie, de l'axe d'homologie et des points homologues (l'axe d'homologie coïncide avec l'échelle u, le centre d'homologie avec l'extrémité supérieure de l'échelle v)

Exemple 58. La figure 171 représente l'abaque de la relation

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$$

construit d'après la méthode décrite au § 6.4. Les échelles u et v sont symétriques par rapport à l'échelle verticale w. Les extrémités supérieures des échelles sont situées sur une horizontale, les extrémités inférieures sur une oblique. Transformons l'abaque de telle sorte que les supports des échelles extrêmes soient invariants et la longueur de l'échelle de droite égale à celle de l'échelle de gauche.

Le problème est résolu si l'on se donne l'homologie de la façon suivante. On prend pour axe d'homologie p le support de l'échelle u, pour centre P l'extrémité supérieure de l'échelle v, pour points homologues A et A' l'extrémité inférieure de l'échelle v et le point d'intersection du support de cette dernière avec la droite horizontale passant par l'extrémité inférieure de l'échelle u.

Exemple 59. La figure 172 représente un abaque de la formule

$$w^2=u^2+v^2$$

sur les intervalles $0 \leqslant u \leqslant 3$, $0 \leqslant v \leqslant 4$, $0 \leqslant w \leqslant 5$. Les équations de ses éléments sont:

échelle u:

$$x=0, \quad y=18u^2;$$

échelle v:

$$x=120, \quad y=10v^2;$$

échelle w:

$$x = 77{,}1, \quad y = 6{,}43w^2.$$

La droite en pointillé représente la solution de l'exemple numérique : $u = 1{,}2$, $v = 2{,}9$; réponse $w = 3{,}14$. On constate que l'échelle

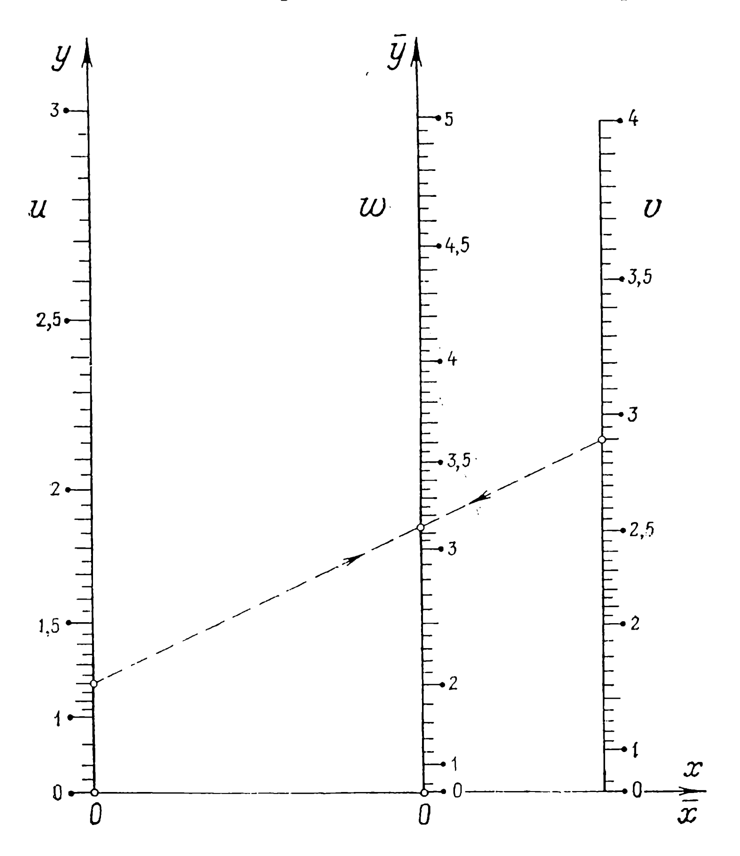


Fig. 172. Abaque à points alignés et échelles parallèles pour la formule $w^2 = u^2 + v^2$

w diffère nettement d'une échelle métrique. Transformons l'abaque de telle sorte que l'échelle w soit proche d'une échelle métrique.

Faisons coïncider l'axe d'homologie avec l'axe Ox. Plaçons le centre d'homologie au point coté 5 de l'échelle w. On trouve $L = 6{,}43\,(5^2 - 0^2) = 160{,}7$ mm. Ecrivons les équations des éléments de l'abaque dans le nouveau système de coordonnées $\overline{xOy}$, où l'axe $\overline{Oy}$

est confondu avec le support de l'échelle w et l'axe $\overline{Ox}$ avec l'axe d'homologie :

échelle u:

$$\bar{x} = -77{,}1, \quad \bar{y} = 18u^2;$$

échelle v:

$$\bar{x} = 42{,}9, \quad \bar{y} = 10v^2;$$

échelle w:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 6{,}43w^2.$$

Il reste maintenant à choisir les points homologues. Si l'échelle w était métrique, le point de cote $w = 2{,}5$ se trouverait au milieu de

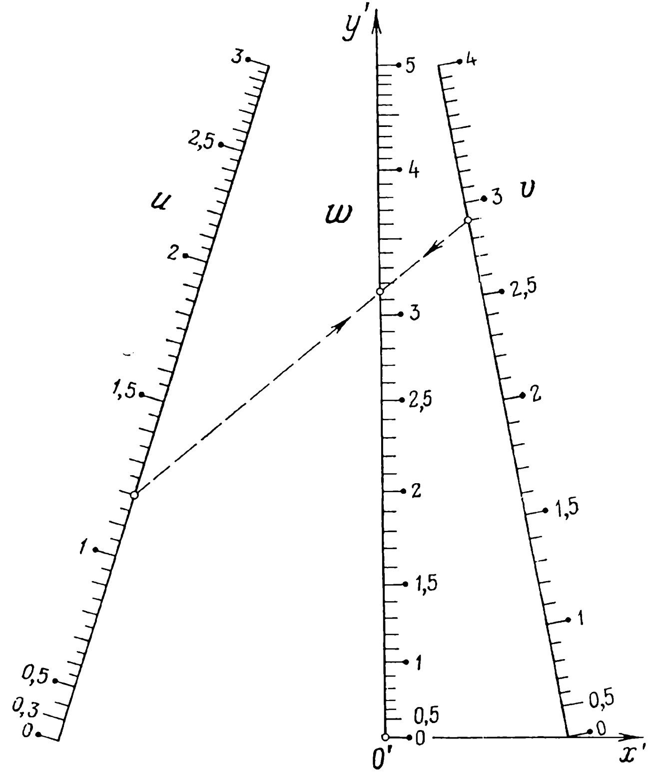


Fig. 173. Abaque à points alignés à échelles rectilignes concourantes pour la formule $w^2 = u^2 + v^2$, déduit de l'abaque de la figure 172 par une homologie

l'échelle et aurait pour ordonnée $0{,}5L = 0{,}5 \cdot 160{,}7 = 80{,}3$ mm. Exigeons que le point de cote $w = 2{,}5$ et de coordonnées $\bar{x} = 0$ et $\bar{y} = 6{,}43 \cdot 2{,}5^2 = 40{,}2$ mm ait pour image le point $x' = 0$, $y' = 80{,}3$ mm. Pour déterminer la valeur correspondante du paramètre l appliquons la formule (7.11) qui s'écrit ici:

$$l = \frac{y'(L - \bar{y})}{y' - \bar{y}}.$$

On a $L = 160{,}7$ mm, $\bar{y} = 40{,}2$ mm, $y' = 80{,}3$ mm. Il vient

$$l = \frac{80{,}3\,(160{,}7 - 40{,}2)}{80{,}3 - 40{,}2} = 241{,}3 \text{ mm}.$$

Les formules d'homologie (7.9) s'écrivent

$$x' = \frac{(241{,}3 - 160{,}7)\,\bar{x}}{241{,}3 - 160{,}7 + \bar{y}} = \frac{80{,}6\bar{x}}{80{,}6 + \bar{y}},$$

$$y' = \frac{241{,}3\bar{y}}{241{,}3 - 160{,}7 + \bar{y}} = \frac{241{,}3\bar{y}}{80{,}6 + \bar{y}}.$$

Les équations des éléments de l'abaque transformé s'écrivent dans le système de coordonnées $x'O'y'$:

échelle u:

$$x' = \frac{80{,}6\,(-77{,}1)}{80{,}6 + 18u^2}, \quad y' = \frac{241{,}3 \cdot 18u^2}{80{,}6 + 18u^2};$$

échelle v:

$$x' = \frac{80{,}6 \cdot 42{,}9}{80{,}6 + 10v^2}, \quad y' = \frac{241{,}3 \cdot 10v^2}{80{,}6 + 10v^2};$$

échelle w:

$$x' = \frac{80{,}6 \cdot 0}{80{,}6 + 6{,}43w^2}, \quad y' = \frac{241{,}3 \cdot 6{,}43w^2}{80{,}6 + 6{,}43w^2}.$$

L'abaque correspondant est celui de la figure 173. L'échelle w s'est améliorée: elle est devenue plus proche d'une échelle métrique. La ligne en pointillé représente la solution du même exemple numérique que celui de l'abaque de la figure 172.

CHAPITRE 8

ABAQUES À ENTRECROISEMENT COMPOSÉS ET LEUR TRANSFORMATION EN ABAQUES D'AUTRES TYPES

§ 8.1. Abaques à entrecroisement composés pour équations à quatre variables et leur transformation en d'autres types d'abaques

Parmi les équations à quatre variables

$$(u,\ v,\ w,\ t) = 0 \tag{8.1}$$

celles qui se ramènent à la forme

$$\varphi\ (u,\ v) = \psi\ (w,\ t) \tag{8.2}$$

présentent un grand intérêt pratique. La méthode de représentation de ces équations par un abaque est la suivante. En introduisant une

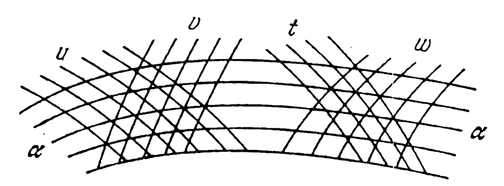


Fig. 174. Schéma d'un abaque composé à entrecroisement pour l'équation $\varphi\ (u,\ v) = \psi\ (w,\ t)$

variable auxiliaire α, on remplace l'équation (8.2) par les équations suivantes :

$$\varphi\ (u,\ v) = \alpha, \tag{8.3}$$

$$\psi\ (w,\ t) = \alpha. \tag{8.4}$$

Choisissons (cf. fig. 174) une famille arbitraire de lignes α et couponsla par deux familles arbitraires de lignes u et t en exigeant seulement qu'elles forment les réseaux (α, u) et (α, t) avec les lignes α. Dans ces réseaux construisons les familles v et w à l'aide des équations (8.3) et (8.4).

L'abaque obtenu s'appelle *abaque à entrecroisement composé.* Il est formé de deux abaques à entrecroisement admettant une famille commune de lignes de la variable auxiliaire α. Il n'est pas nécessaire de connaître les cotes des lignes α lorsqu'on se sert de cet abaque.

C'est pourquoi la famille de lignes α peut être *muette* ou *constante*. Cette famille s'appelle *famille de lignes de liaison*.

La clef de l'abaque est représentée sur la figure 175. Pour déterminer t d'après des valeurs données de u, v et w, on trouve le point de rencontre des lignes u et v possédant ces cotes. Par ce point passe une ligne de liaison α, dont l'intersection avec la ligne donnée w

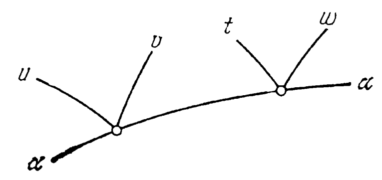


Fig. 175. Clef de l'abaque de la **figure 174**

donne le point cherché. La cote de la ligne t passant par ce point fait connaître la réponse t. On résout les autres problèmes de façon analogue.

Le choix des familles de lignes α, u, t étant arbitraire, on prend en général des familles régulières ou logarithmiques de droites parallè-

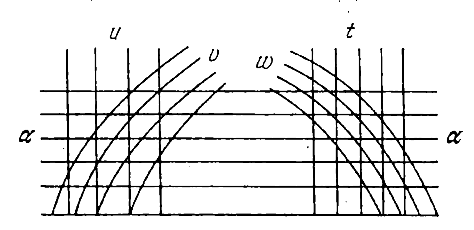


Fig. 176. Schéma d'un abaque composé à entrecroisement pour l'équation $\varphi(u, v) = \psi(w, t)$, constitué de deux familles de courbes et de trois familles de droites parallèles

les, telles que les droites u et t soient perpendiculaires aux droites α. On obtient ainsi un abaque formé de deux familles curvilignes et de trois familles de droites parallèles (fig. 176).

Si l'on sait que l'équation (8.1) peut être ramenée à la forme (8.2) il n'est pas nécessaire d'expliciter les fonctions φ et ψ dans les équations (8.2) pour construire l'abaque. Dans ce cas on le trace de la façon suivante [68]. On se donne des familles arbitraires u, t et α comme sur la figure 176. On n'inscrit pas les cotes des droites horizontales α. On coupe la famille de droites u par une ligne quelconque, une droite par exemple, et on lui affecte la cote v_0. Les droites u déterminent sur elle une échelle u, qui, à son tour, gradue les droites horizontales en u. On obtient en définitive le réseau orthogonal (u, t) (fig. 177, a) constitué de droites horizontales u et de droites

verticales t. Construisons dans ce réseau la famille de lignes w à l'aide de l'équation

$$F\ (u,\ v_0,\ w,\ t) = 0. \tag{8.5}$$

On obtient l'abaque à entrecroisement de cette équation. Choisissons une ligne quelconque w_0. Les droites t y découpent une échelle t qui gradue les droites horizontales en t. Donc on obtient de nouveau

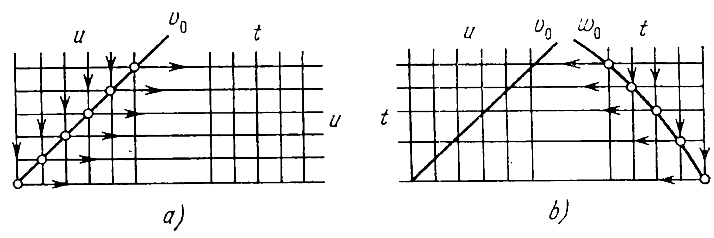


Fig. 177. Construction d'un abaque du type de la figure 176 pour l'équation $F\ (u,\ v,\ w,\ t) = 0$ sans réduction préalable à la forme $\varphi\ (u,\ v) = \psi\ (w,\ t)$: *a*) mise en place du réseau auxiliaire $(u,\ t)$ à l'aide de la droite v_0; *b*) mise en place du réseau auxiliaire $(u,\ t)$ à l'aide de la ligne w_0

un réseau orthogonal $(u,\ t)$ (fig. 177, *b*) constitué de droites horizontales t et de droites verticales u. Traçons dans ce réseau la famille v à l'aide de l'équation

$$F\ (u,\ v,\ w_0,\ t) = 0. \tag{8.6}$$

On obtient l'abaque à entrecroisement de cette équation. En définitive on aboutit à l'abaque de la figure 176.

Dans le cas où l'équation (8.1) ne se ramène pas à la forme (8.2) l'algorithme étudié conduit à un abaque approché qui sera exact

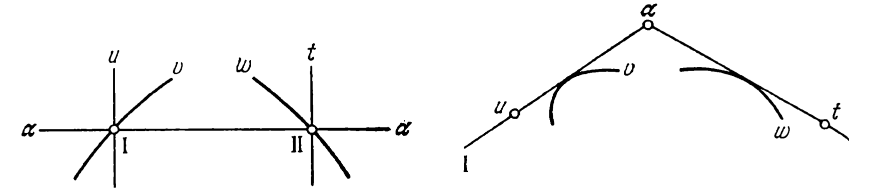


Fig. 178. Clef de l'abaque de la figure 176

Fig. 179. Clef du dual de l'abaque de la figure 176

pour $v = v_0$ et $w = w_0$, i.e. ne sera exact que pour les deux cas particuliers des équations (8.1) — les équations (8.5) et (8.6) — à l'aide desquelles il a été construit.

Soit à chercher le dual de l'abaque de la figure 176. Dans sa clef qui est représentée sur la figure 178, désignons par I le point de rencontre des lignes u, v et α et par II celui des lignes w, t et α.

Une transformation corrélative (cf. fig. 179) fait correspondre aux points I et II deux droites résolvantes I et II qui se coupent en un point α, image de la droite α. La droite u se transforme en un point u de la droite I, la courbe v en une courbe v tangente à la droite I, la droite t en un point t de la droite II, la courbe w en une courbe w tangente à la droite II. En définitive on obtient un *abaque composé à points alignés à trois contacts ponctuels et à deux contacts tangentiels* (fig. 180). Dans cet abaque l'échelle α peut être constante. L'une quelconque des grandeurs u, v, t et w se trouve par une double application de la règle.

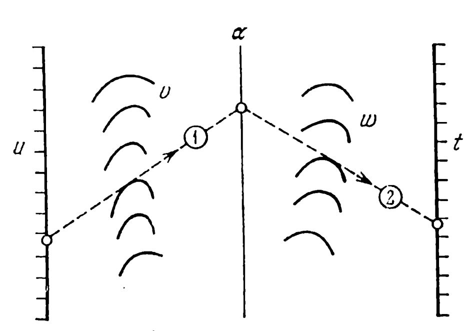


Fig. 180. Schéma du dual de l'abaque de la figure 176

Les familles de droites α, u et t étant choisies arbitrairement dans l'abaque à entrecroisement de la relation (8.2), on conclut que dans l'abaque dual on peut choisir de façon tout à fait arbitraire les échelles α, u et t. Les lignes v et w peuvent être construites d'après des exemples à l'aide des équations (8.3) et (8.4). L'échelle α peut rester constante. L'abaque sera commode à l'usage si les familles de lignes seront disposées dans une bande étroite et ne présenteront pas de points de retour et de point d'inflexion.

Les familles de lignes de liaison α étant arbitraires dans l'abaque à entrecroisement de la relation (8.2), on est libre de les prendre sous la forme d'un faisceau de droites de sommet P ou d'une famille de cercles concentriques de centre le point P. Si l'on ne conserve que les centres P, on obtient les abaques des figures 181 et 182. Le mode d'emploi des abaques est très simple. L'abaque de la figure 181 exige une simple application de la règle, celui de la figure 182 une simple ouverture de compas.

Comme dans le cas précédent, on peut se poser la question de savoir de quelle forme doivent être les équations (8.3) et (8.4) pour que l'abaque à entrecroisement composé soit rectiligne. Il est aisé de voir qu'une condition nécessaire est que ces équations se ramènent à la forme

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ f(\alpha) & g(\alpha) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f(\alpha) & g(\alpha) & 1 \\ f_3(w) & g_3(w) & 1 \\ f_4(t) & g_4(t) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.7}$$

Dans ce cas les équations des familles de droites de l'abaque s'écrivent :

droites u:

$$f_1(u)\,x + g_1(u)\,y + 1 = 0;$$

droites v:

$$f_2(v)\,x + g_2(v)\,y + 1 = 0;$$

droites α:

$$f(\alpha)\,x + g(\alpha)\,y + 1 = 0;$$

droites w:

$$f_3(w)\,x + g_3(w)\,y + 1 = 0;$$

droites t:

$$f_4(t)\,x + g_4(t)\,y + 1 = 0.$$

L'abaque est représenté sur la figure 183.

Son dual est un abaque à double alignement composé des échelles curvilignes u, v, w, α et t. Le schéma est représenté sur la figure 184.

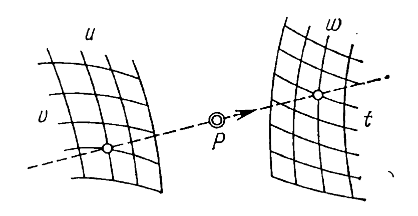


Fig. 181. Schéma de l'abaque à points alignés pour l'équation $\varphi(u, v) = \psi(w, t)$ obtenu en remplaçant le faisceau de droites α par son centre P dans l'abaque à entrecroisement de cette équation

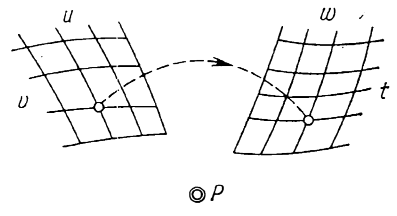


Fig. 182. Schéma de l'abaque à points équidistants pour l'équation $\varphi(u, v) = \psi(w, t)$ obtenu en remplaçant le faisceau de cercles concentriques α par son centre P dans l'abaque à entrecroisement de cette équation

C'est *l'abaque à échelle à points alignés le plus général pour une relation à quatre variables.* Pour trouver la forme de la relation représentée, il faut éliminer la variable auxiliaire α entre les équations du système (8.7).

Si dans les équations (8.7), on remplace toutes les fonctions d'une variable par des fonctions de deux variables, on obtient un système de deux équations

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} f_{12}(\alpha_1, \alpha_2) & g_{12}(\alpha_1, \alpha_2) & 1 \\ f_{34}(\alpha_3, \alpha_4) & g_{34}(\alpha_3, \alpha_4) & 1 \\ f_5(\alpha, \alpha_5) & g_5(\alpha, \alpha_5) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\
&\begin{vmatrix} f_5(\alpha, \alpha_5) & g_5(\alpha, \alpha_5) & 1 \\ f_{67}(\alpha_6, \alpha_7) & g_{67}(\alpha_6, \alpha_7) & 1 \\ f_{89}(\alpha_8, \alpha_9) & g_{89}(\alpha_8, \alpha_9) & 1 \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (8.8)$$

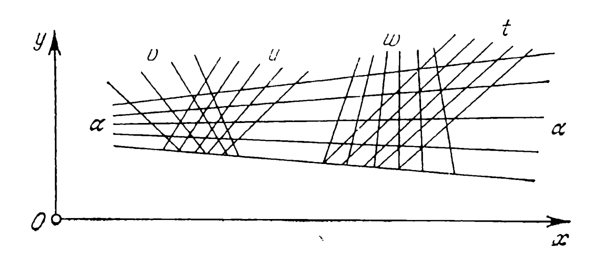


Fig. 183. Schéma d'un abaque composé rectiligne à entrecroisement pour les équations (8.7)

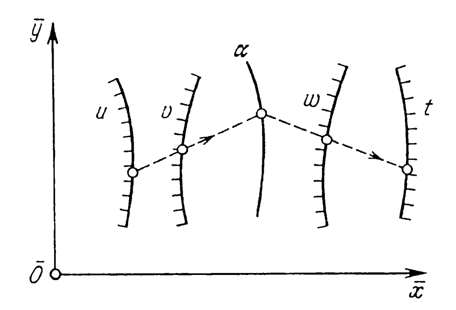


Fig. 184. Schéma d'un abaque à points alignés composé, dual de l'abaque de la figure 183

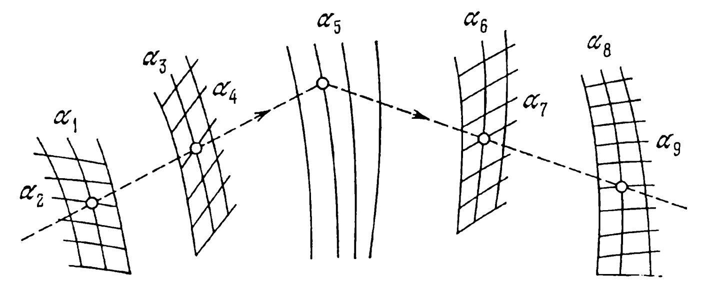


Fig. 185. Schéma de l'abaque composé à double alignement le plus général pour les équations (8.8), obtenu par généralisation de l'abaque de la figure 184

liant neuf variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ et la variable auxiliaire α. L'abaque est représenté sur la figure 185. La famille de lignes attribuée à la variable auxiliaire α n'a pas été portée sur l'abaque. La relation représentée par l'abaque s'obtient par élimination de la variable auxiliaire α entre les équations du système (8.8). Cette relation ne peut être explicitée que dans quelques cas particuliers.

L'abaque obtenu est l'*abaque à points alignés à double alignement le plus général* (*abaque à champ unaire*).

§ 8.2. Abaques à entrecroisement composés pour équations à cinq variables et leur transformation en d'autres types d'abaques

Pour qu'une relation à cinq variables soit représentable par un abaque à entrecroisement composé, il faut la décomposer, en introduisant deux variables auxiliaires, en trois équations à trois variables. La forme la plus générale d'équation représentable par cet abaque est

$$s = P(t, \Phi(w, \varphi(u, v))). \qquad (8.9)$$

En introduisant les variables auxiliaires α et β, on décompose l'équation (8.9) en trois équations

$$\varphi(u, v) = \alpha, \quad \Phi(w, \alpha) = \beta, \quad s = P(t, \beta). \qquad (8.10)$$

Prenons les familles arbitraires des variables auxiliaires α et β telles qu'elles forment un réseau (α, β). Puis faisons couper la famille de lignes α par une famille arbitraire de lignes u et la famille de lignes β, par une famille arbitraire de lignes s (cf. fig. 186). Construisons dans les réseaux (α, u), (α, β) et (β, s) les familles de lignes v, w et t à l'aide des équations (8.10). Après la construction des abaques on peut rendre muettes les familles de lignes α et β en omettant leurs cotes. Elles portent de nouveau le nom de *familles de lignes de liaison*. La clef de l'abaque est représentée sur la figure 187.

Les familles de lignes u, α, β et s étant choisies arbitrairement, on peut les prendre sous forme de familles de droites parallèles successivement perpendiculaires l'une à l'autre. On obtient l'abaque de la figure 188. La famille de parallèles α fait un angle de 45° avec l'horizontale, la famille u un angle de 135°, etc.

On peut omettre de tracer les droites parallèles α et β (cf. fig. 189), mais il faudra alors lire cet abaque avec un té et une équerre équilatère (cf. fig. 190). L'abaque peut être orienté sur une planche à dessin à l'aide des familles de droites parallèles u ou s. Le mode d'emploi est alors le suivant. On trouve le point de rencontre des lignes données u et v et on applique sur lui le côté gauche de l'équerre. On note le point d'intersection du côté gauche avec la ligne donnée w. Puis on applique le côté droit sur le point repéré et au point d'intersection

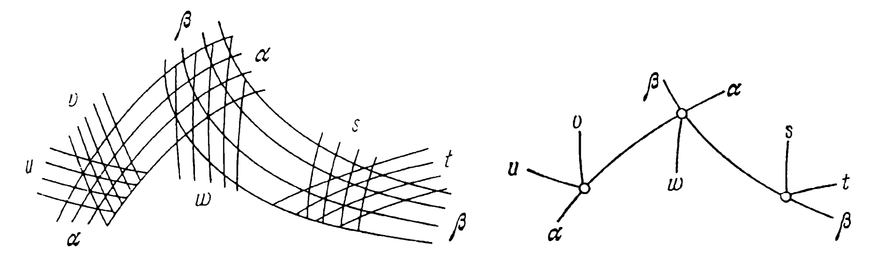


Fig. 186. Schéma d'un abaque composé à entrecroisement pour l'équation (8.9)

Fig. 187. Clef de l'abaque de la figure 186

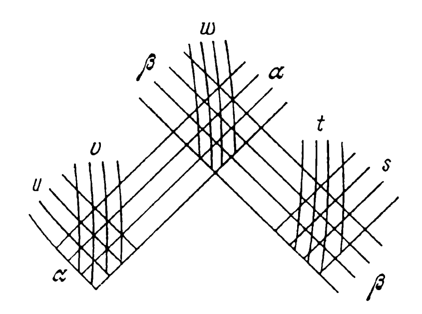


Fig. 188. Schéma d'un abaque composé à entrecroisement de l'équation (8.9), constitué de quatre familles de droites parallèles u, α, β, s alternativement perpendiculaires l'une à l'autre, et de trois familles de courbes v, w et t

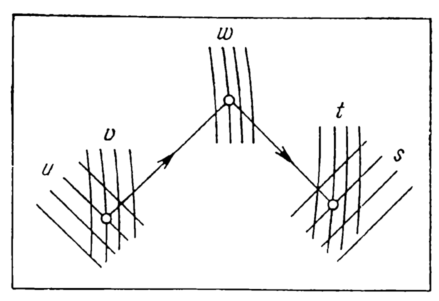


Fig. 189. Schéma de l'abaque pour l'équation (8.9), déduit à partir de la figure 188 par suppression des droites parallèles attribuées aux variables auxiliaires α et β

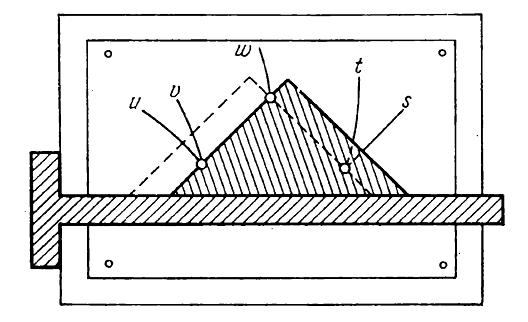


Fig. 190. Application d'une planche, d'un té et d'une équerre équilatère à la lecture de l'abaque de la figure 189

du côté droit avec la ligne donnée t on lit la réponse s. Cette méthode est très commode dans le cas où les calculs sont nombreux.

On peut remplacer le té et l'équerre par une feuille de papier transparent sur laquelle on aura porté deux droites perpendiculaires α et β, leur point d'intersection M et une droite horizontale directrice a_0 faisant avec α et β un angle de 45° et 135° respectivement. Dans la partie inférieure de l'abaque de la figure 189, il faut tracer la *famille*

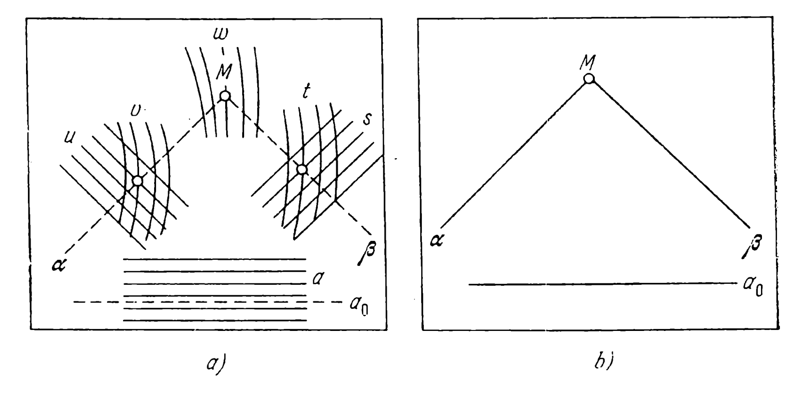


Fig. 191. Schéma d'un abaque à transparent orienté déduit de la figure 188: *a*) fond; *b*) transparent

de droites horizontales directrices a qui font avec les droites u et s les angles de 135° et de 45°. On obtient l'abaque de la figure 191 qui rentre dans la *classe des abaques à transparent orienté*. Il est constitué d'un *plan fixe* ou *fond* (fig. 191, *a*) et d'un *plan mobile* ou *transparent* (fig. 191, *b*). Pour déterminer s à l'aide de l'abaque de la figure 191, on fait glisser le transparent sur le fond de telle sorte que la droite a_0 soit parallèle aux droites a, que le point M tombe sur la ligne donnée w et la droite α passe par le point donné du champ binaire (u, v). La réponse s est la cote de la droite s qui passe par le point de rencontre de la droite β et de la ligne donnée t.

L'abaque dual de celui de la figure 188 sera constitué des échelles parallèles u, α, β, s et d'une famille d'arcs v, w et t. Il est représenté sur la figure 192. La lecture de la réponse s implique trois applications de règle. Comme dans le cas précédent, les échelles rectilignes parallèles, leur direction et leur disposition sont arbitraires. Les familles de lignes v, w et t peuvent être construites d'après des exemples à l'aide des équations (8.10).

Prenons maintenant les familles de lignes α et β sous forme de faisceaux de droites dont on ne représentera que les sommets P_1 et P_2. On obtient alors un *abaque à points alignés à double alignement* (fig. 193) qui généralise celui de la figure 89.

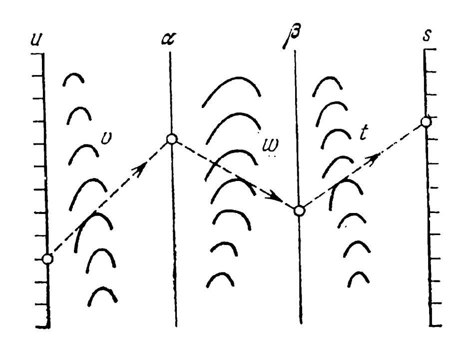


Fig. 192. Schéma de l'abaque composé à points alignés à trois contacts tangentiels et quatre contacts ponctuels pour l'équation (8.9), dual de l'abaque de la figure 188

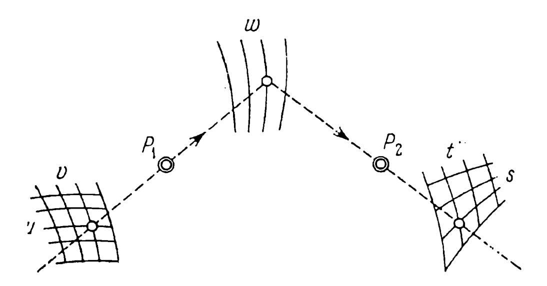


Fig. 193. Schéma de l'abaque composé à points alignés pour l'équation (8.9), obtenu en remplaçant les faisceaux de droites α et β par leurs centres P_1 et P_2 dans l'abaque à entrecroisement de cette équation

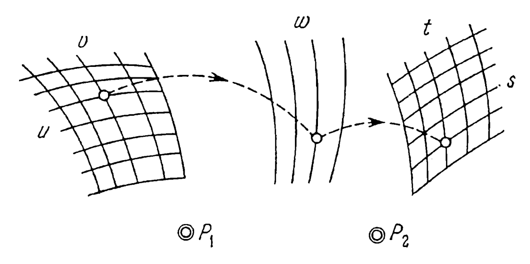


Fig. 194. Schéma de l'abaque composé à points équidistants pour l'équation (8.9), obtenu en remplaçant les faisceaux de cercles concentriques α et β par leurs centres P_1 et P_2 dans l'abaque à entrecroisement de cette équation

Si pour familles de lignes α et β on prend des familles de cercles concentriques, dont on ne représentera que les centres P_1 et P_2, on obtient un *abaque à points équidistants résolvable par deux ouvertures de compas* (fig. 194) généralisant celui de la figure 90.

§ 8.3. Abaques à entrecroisement en chaîne pour équations à plusieurs variables et leur transformation en d'autres types d'abaques

Modifions les notations des variables et des fonctions dans l'équation (8.9). Désignons u par α_1, v par α_2, etc., φ par f_2, Φ par f_3 et P par f_4. L'équation (8.9) s'écrit alors

$$\alpha_5 = f_4(\alpha_4, f_3(\alpha_3, f_2(\alpha_2, \alpha_1))).$$

Elle se généralise facilement à un plus grand nombre de variables. Ainsi dans le cas de six variables on aura

$$\alpha_6 = f_5(\alpha_5, f_4(\alpha_4, f_3(\alpha_3, f_2(\alpha_2, \alpha_1)))). \qquad (8.11)$$

La figure 195 représente quatre abaques de l'équation (8.11) obtenus par des raisonnements analogues à ceux effectués pour la représentation nomographique des formes (8.2) et (8.9).

La comparaison des abaques des figures 192 et 193 et 195, *b*, *c* permet de tirer une importante conclusion pratique, à savoir: les abaques à points alignés et fixes impliquent une application de règle de moins que les abaques à points alignés à contacts tangentiels. Les abaques à entrecroisement du type de celui de la figure 195, *a* sont appelés abaques *en chaîne*.

Dans le cas de n variables, on obtient la forme

$$\alpha_n = f_{n-1}(\alpha_{n-1}, f_{n-2}(\alpha_{n-2}, \ldots, f_2(\alpha_2, \alpha_1)\underbrace{)\ldots)}_{n-3}. \qquad (8.12)$$

L'abaque à entrecroisement en chaîne de l'équation (8.12) qui, pour n pair, est analogue à ceux des figures 188 et 195, *a*, est représenté sur la figure 196. Si dans cet abaque on remplace les familles de lignes α_1 et α_n par des échelles verticales et qu'on ne marque pas la famille de lignes de liaison, on obtient l'abaque de la figure 197, sur lequel est représentée la *ligne polygonale résolvante*. Ces segments font avec l'axe Ox des angles de 135° et 45° et un angle de 90° entre eux. Comme plus haut (cf. fig. 190), pour construire la ligne polygonale résolvante on peut se servir d'un té et d'une équerre équilatérale.

L'équation

$$f_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} \qquad (8.13)$$

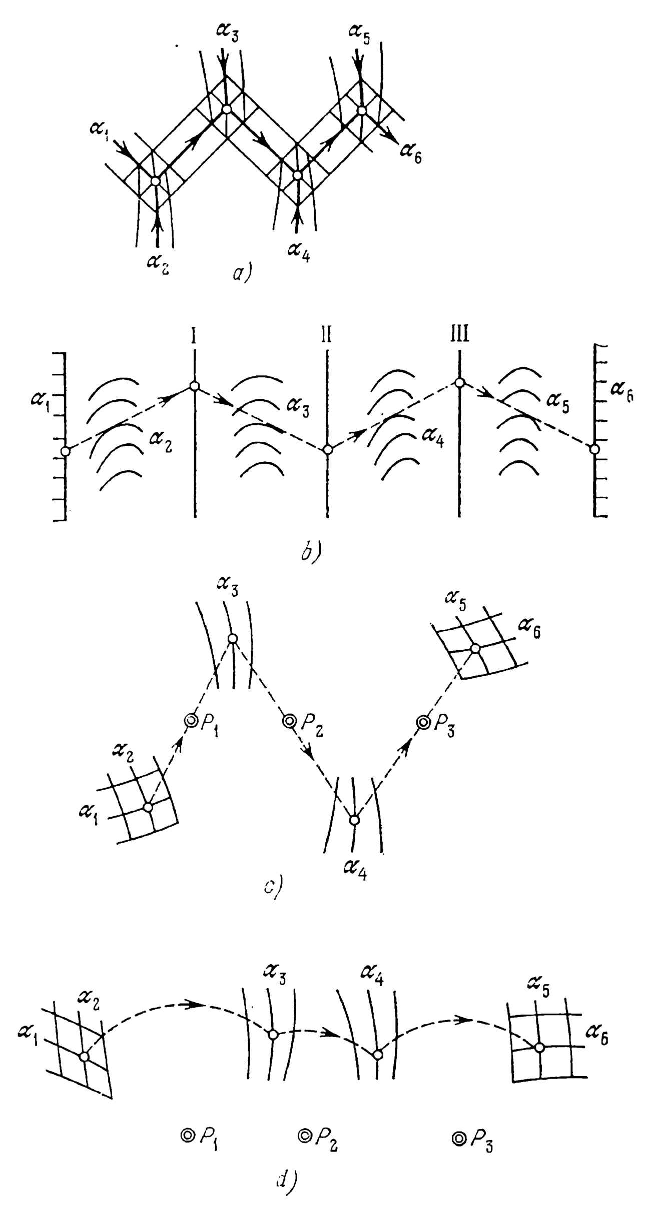


Fig. 195. Schémas d'abaques pour l'équation (8.11) : *a*) à entrecroisement en chaîne ; *b*) à points alignés à quatre contacts tangentiels et cinq contacts ponctuels ; *c*) à points alignés à trois points fixes P_1, P_2 et P_3 ; *d*) à points équidistants à trois centres fixes P_1, P_2 et P_3

est un cas particulier important de la relation (8.12). L'abaque de l'équation (8.13) s'obtient très facilement puisque dans le schéma de la figure 197, les familles de lignes α_2, α_3, . . ., α_{n-2}, α_{n-1}

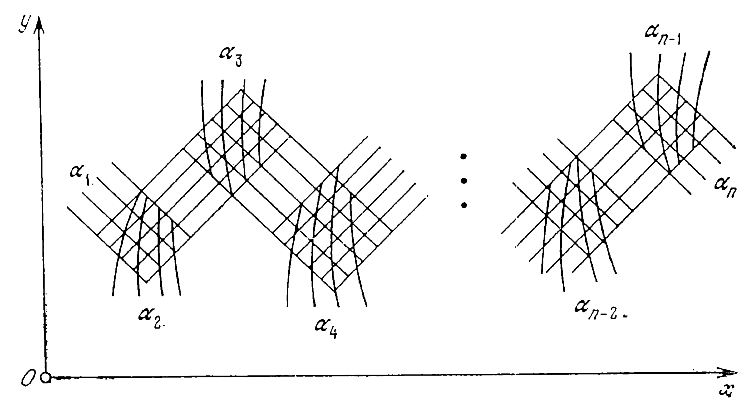


Fig. 196. Schéma d'un abaque à entrecroisement en chaîne pour l'équation (8.12) avec n pair

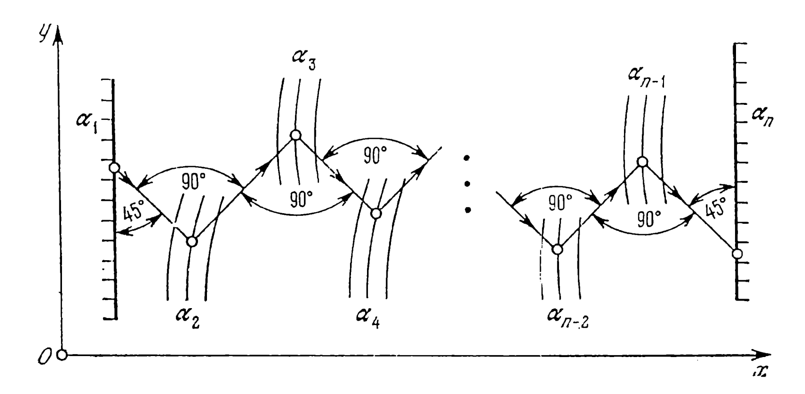


Fig. 197. Schéma de l'abaque pour l'équation (8.12), obtenu en remplaçant dans l'abaque de la figure 196 les familles α_1 et α_n par des échelles verticales α_1 et α_n et en supprimant les familles de droites parallèles attribuées aux variables auxiliaires

se transforment en familles de droites parallèles aux échelles α_1 et α_n. Dans l'article [69] on propose une méthode très simple de construction de tels abaques pour des relations de la forme (8.13).

§ 8.4. Abaques à entrecroisement ramifiés pour équations à six variables et leur transformation en d'autres types d'abaques

Outre les abaques à entrecroisement en chaîne qui sont des types simples d'abaques à entrecroisement composés, il existe des *abaques à entrecroisement ramifiés*. Un abaque à entrecroisement composé est dit *ramifié* si parmi les abaques à entrecroisement simples qui le composent il en est qui sont à trois familles de lignes attribuées aux variables auxiliaires. Il est impossible d'indiquer la forme canonique la plus générale pour un abaque à entrecroisement ramifié liant n variables. Mais cette forme existe pour les relations à six variables. Elle s'écrit

$$f_{12} = F(f_{34}, f_{56}), \tag{8.14}$$

où

$$f_{12} = f_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \quad f_{34} = f_{34}(\alpha_3, \alpha_4), \quad f_{56} = f_{56}(\alpha_5, \alpha_6).$$

Pour représenter l'équation (8.14) par un abaque à entrecroisement ramifié il faut, moyennant l'introduction de trois variables auxiliaires α, β et γ, la remplacer par le système de quatre équations

$$\gamma = F(\alpha, \beta), \tag{8.15}$$

$$\gamma = f_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \tag{8.16}$$

$$\alpha = f_{34}(\alpha_3, \alpha_4), \tag{8.17}$$

$$\beta = f_{56}(\alpha_5, \alpha_6), \tag{8.18}$$

contenant chacune trois variables. Pour familles de lignes α et β prenons des familles de droites parallèles faisant des angles de 135° et 45° avec l'horizontale. Dans le réseau orthogonal (α, β) construisons la famille de lignes γ (fig. 198) à l'aide de l'équation (8.15). Puis faisons couper les familles de lignes γ, α, β respectivement par les familles de lignes α_1, α_3 et α_5, et dans les réseaux (α_1, γ), (α_3, α) et (α_5, β) construisons les familles de lignes α_2, α_4 et α_6 à l'aide des équations (8.16), (8.17) et (8.18). La clef est représentée en gros trait sur l'abaque de la figure 198.

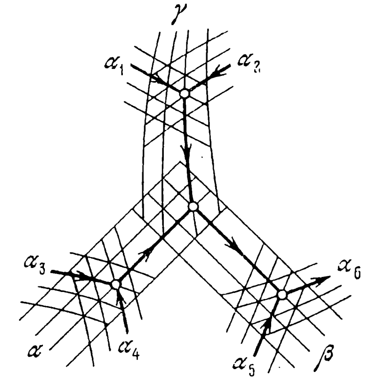


Fig. 198. Schéma d'un abaque à entrecroisement ramifié pour l'équation $f_{12} = F(f_{34}, f_{56})$

Cet abaque peut être transformé en l'abaque à transparent orienté de la figure 199, qui est identique à celui de la figure 191.

L'abaque de la figure 198 peut être aussi transformé en des abaques à points alignés et à points équidistants qui sont analogues aux abaques des figures 193 et 194.

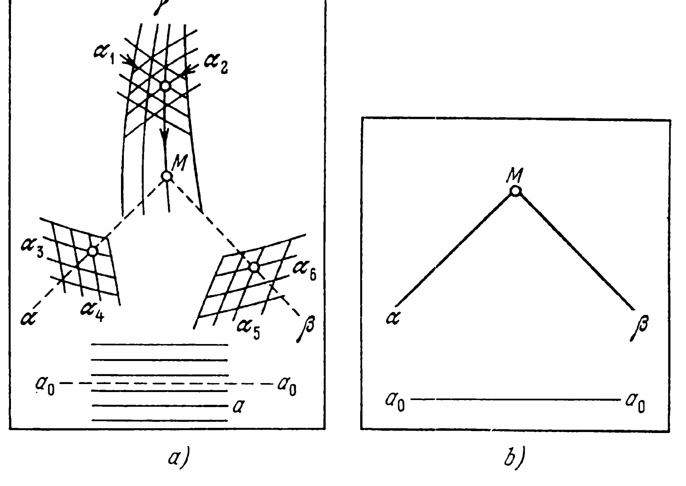


Fig. 199. Schéma d'un abaque à transparent orienté déduit de la figure 198: *a*) fond ; *b*) transparent.

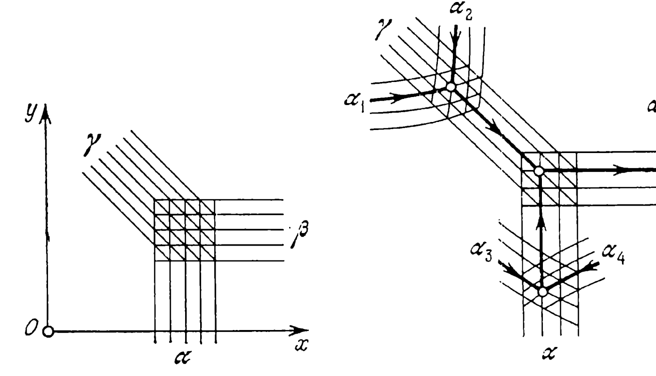


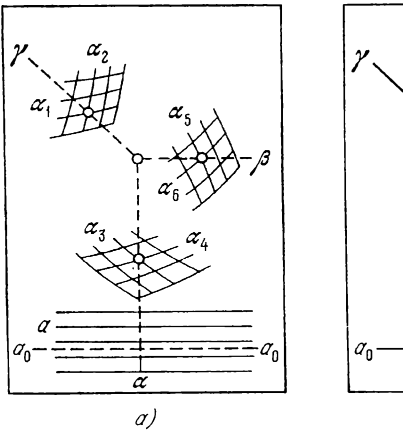
Fig. 200. Schéma d'un abaque à entrecroisement pour l'équation $\gamma = \alpha + \beta$

Fig. 201. Schéma d'un abaque à entrecroisement ramifié pour l'équation $f_{12} = f_{34} + f_{56}$

Dans la pratique on rencontre constamment la forme

$$f_{12} = f_{34} + f_{56} \tag{8.19}$$

qui est un cas particulier de l'équation (8.14). L'équation (8.15) qui lie les variables auxiliaires α, β et γ s'écrit dans ce cas $\gamma = \alpha + \beta$. Elle peut être représentée par un abaque à entrecroisement composé de trois familles de droites parallèles α, β et γ. Supposons $x = \alpha$ et $y = \beta$. Il vient $\gamma = x + y$. Construisons l'abaque à l'aide de ces équations. On obtient la figure 200. Traçons ensuite les champs



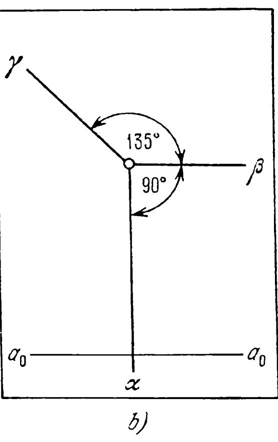


Fig. 202. Schéma de l'abaque à transparent orienté pour l'équation $f_{12} = f_{34} + f_{56}$, déduit de la figure 201 : *a*) fond ; *b*) transparent

binaires (α_1, α_2), (α_3, α_4) et (α_5, α_6). On obtient l'abaque de la relation (8.19), qui est représenté sur la figure 201. La clef est tracée en gros trait.

Cet abaque étant composé de droites parallèles α, β et γ, on peut le transformer en un abaque à transparent orienté. A cet effet traçons sur le fond les champs (α_1, α_2), (α_3, α_4) et (α_5, α_6) et portons une famille de droites directrices a parallèles à la famille β. Dessinons sur le transparent trois droites concourantes parallèles respectivement aux droites α, β et γ et désignons-les par α, β et γ. Menons par ailleurs sur le transparent une droite directrice a_0 parallèle à β. L'abaque est représenté sur la figure 202.

Le mode d'emploi est le suivant. Soit à déterminer α_6 d'après les valeurs données des autres variables. Faisons glisser le transparent sur le fond de telle sorte que le rayon γ passe par le point donné du champ (α_1, α_2), le rayon α par le point donné du champ (α_3, α_4) et la droite a_0 soit parallèle à la directrice a. La réponse α_6 est alors

donnée par la cote de la ligne α_6 passant par le point de rencontre du rayon β avec la ligne donnée α_5.

Si l'abaque de la figure 200 est construit dans un système de coordonnées obliques, l'angle des coordonnées étant égal à 60°, les rayons α, β et γ feront entre eux un angle de 120°.

§ 8.5. Abaque à entrecroisement ramifié pour l'équation $f_{12} = f_{34} + f_{35}$ et sa transformation en un abaque adapté à points équidistants

L'équation

$$f_{12}(\alpha_1, \alpha_2) = f_{34}(\alpha_3, \alpha_4) + f_{35}(\alpha_3, \alpha_5) \quad (8.20)$$

est un cas particulier important de l'équation (8.19). L'équation (8.20) a ceci de particulier que les fonctions f_{34} et f_{35} qui y figurent dépendent de la même variable α_3. Construisons un abaque à entrecroisement ramifié pour cette équation. Introduisons les variables auxiliaires α, β et γ:

$$\alpha = f_{34}(\alpha_3, \alpha_4), \quad (8.21)$$

$$\beta = f_{35}(\alpha_3, \alpha_5), \quad (8.22)$$

$$\gamma = f_{12}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (8.23)$$

L'équation (8.20) s'écrit dans ce cas

$$\gamma = \alpha + \beta. \quad (8.24)$$

Soit un système de coordonnées rectangulaires xOy (fig. 203). Posons $x = \alpha$ et $y = \beta$. La relation (8.24) s'écrit $\gamma = x + y$. Des équations obtenues, il résulte que les familles de lignes α, β et γ de l'abaque de l'équation (8.24) sont des familles distinctes de droites parallèles. Les droites γ font un angle de 135° avec l'axe Ox. Les droites α sont perpendiculaires à l'axe Ox, les droites β à l'axe Oy. Utilisons les familles de droites α, β et γ pour construire les abaques à entrecroisement des relations (8.21), (8.22) et (8.23). Prenons une famille quelconque de lignes α_1 formant le réseau (α_1, γ) avec la famille γ et traçons sur ce réseau la famille de lignes α_2 à l'aide de l'équation (8.23). Choisissons une famille arbitraire de droites parallèles α_3 telles qu'elles fassent un angle de 45° avec l'axe Ox. Construisons les familles de lignes α_4 et α_5 dans les réseaux (α_3, α) et (α_3, β) à l'aide des relations (8.21) et (8.22).

Le mode d'emploi de l'abaque de la figure 203 est le suivant. Soit à déterminer α_5 d'après des valeurs données des autres variables. Dans le réseau (α_1, α_2), repérons le point A de cotes données α_1 et α_2, dans le réseau (α_3, α_4) le point B de cotes données α_3 et α_4. Les points A et B définissent des droites γ et α se coupant en un

point D. Le point D définit une droite β dont l'intersection avec la droite α_3 qui passe par B donne le point C. La cote de la ligne α_5 passant par le point C fait connaître α_5.

Considérons le triangle BAC (fig. 203). Montrons qu'il est isocèle. Les droites AD et BC sont perpendiculaires, puisque la première est confondue avec une droite de la famille γ et la seconde avec

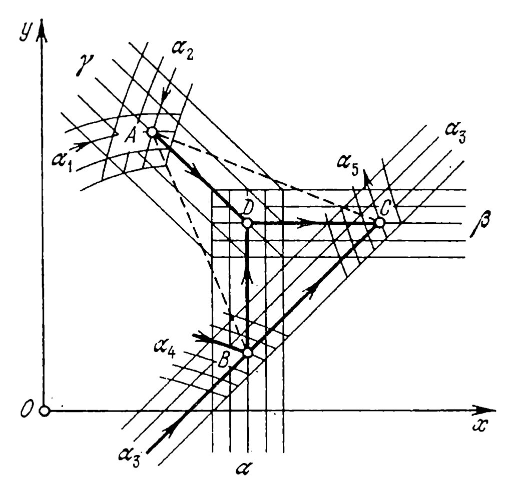


Fig. 203. Schéma d'un abaque à entrecroisement ramifié pour l'équation $f_{12} = f_{34} + f_{35}$

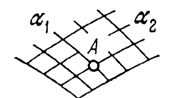
une droite de la famille α_3, or ces familles font avec l'axe Ox des angles de 135° et 45° respectivement. Les angles B et C du triangle BDC sont égaux à 45°. Donc la droite passant par les points A et D est la médiatrice du segment BC. Il suit que le triangle BAC est isocèle et $AB = AC$.

Supprimons maintenant les lignes α, β et γ de la figure 203. On obtient l'abaque de la figure 204. Celui-ci est un cas particulier de l'*abaque général à points équidistants* (cf. § 12.1).

Pour s'en servir il faut nécessairement disposer d'un compas ou d'une règle. Le champ (α_1, α_2) s'appelle *champ des centres*, les champs (α_3, α_4) et (α_3, α_5) *champs des intersections*.

Pour déterminer α_5 d'après des valeurs données des autres variables, plaçons une pointe du compas au point donné A du champ des centres (α_1, α_2) et l'autre pointe au point donné B du champ des intersections (α_3, α_4), puis à partir de A, sans modifier l'ouverture du compas, on trace un arc de cercle de façon à couper α_3. On obtient le point cherché C dans le champ des intersections (α_3, α_5). La cote de ligne α_5 passant par le point C nous fait connaître α_5.

Pour rendre l'abaque de la figure 204 plus maniable, on met à contribution la possibilité de choisir arbitrairement dans l'abaque à en-



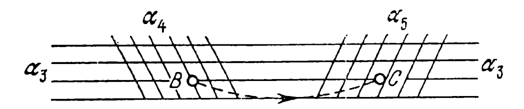


Fig. 204. Schéma de l'abaque à points équidistants pour l'équation $f_{12} = f_{34} + f_{35}$, déduit de la figure 203 par suppression des familles de droites parallèles attribuées aux variables auxiliaires α, β et γ

trecroisement initial la famille de lignes α_1 et la famille de droites α_3 perpendiculaires aux droites γ. Par ailleurs on peut mettre préalablement l'équation (8.20) sous la forme

$$f_{12} = (f_{34} - a + R_3) + (f_{35} + a - R_3),$$

où a est un paramètre, R_3 une fonction arbitraire de α_3. Les équations (8.21) et (8.22) sont remplacées par les équations

$$\alpha = f_{34} - a + R_3 \text{ et } \beta = f_{35} + a - R_3.$$

Le choix arbitraire de la fonction R_3 permet quelquefois de prendre les familles α_4 et α_5 d'une forme commode à l'usage. Par ailleurs par le choix du paramètre a on peut assurer à ces familles une disposition mutuelle compacte. Donc l'abaque de la relation (8.20) est bien adapté. Dans la suite on l'appellera *abaque adapté à points équidistants* contrairement à l'*abaque général à points équidistants* qui est impropre aux transformations.

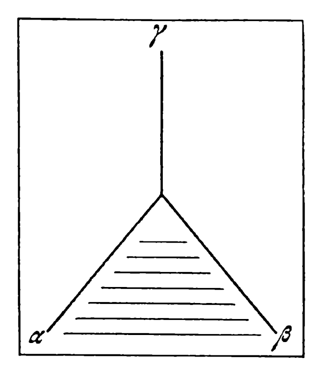


Fig. 205. Transparent pour l'abaque de la figure 204, remplaçant le compas

On remarquera qu'on peut remplacer le compas par le transparent de la figure 205. Ce transparent comporte des rayons α, β, γ et une famille de droites directrices perpendiculaires à γ. Les rayons α et β font des angles égaux avec γ. Le transparent glisse sur le fond de la figure 204 de telle sorte que les directrices soient parallèles aux droites α_3. Cette application du transparent est dite *orientée*.

La clef de l'abaque s'écrit dans ce cas:

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mid - \mid \gamma, (\alpha_3, \alpha_4) \mid - \mid \alpha, (\alpha_3, \alpha_5) \mid - \mid \beta,$$

où | — | est le symbole d'un *contact simple* signifiant que la ligne passe par un point.

§ 8.6. Abaque à entrecroisement ramifié pour l'équation $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$ et sa transformation en un abaque adapté au compas et en d'autres types d'abaques

La forme

$$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46} \tag{8.25}$$

qui est représentable par un abaque à entrecroisement ramifié est d'un grand intérêt pratique. Pour la représenter mettons-la sous la forme

$$f_{12} - f_{45} = -f_{13} + f_{46} = \alpha,$$

où α est une variable auxiliaire. En posant

$$f_{12} = \beta, \quad f_{45} = \gamma, \quad -f_{13} = \beta', \quad -f_{46} = \gamma',$$

on obtient les deux équations similaires $\beta = \alpha + \gamma$ et $\beta' = \alpha + \gamma'$. Si l'on prend le système de coordonnées rectangulaires xOy et que l'on pose $x = \beta$ et $y = \alpha$ dans l'équation $\beta = \alpha + \gamma$, on obtient $x = y + \gamma$. Il résulte que la famille de lignes β est une famille de verticales, la famille de lignes α une famille d'horizontales, la famille de lignes γ une famille de droites parallèles faisant un angle de 45° avec l'axe Ox. L'équation $\beta' = \alpha + \gamma'$ se représente par un abaque analogue. En superposant ces deux abaques, on obtient l'abaque de la figure 206, dont la clef est représentée sur la figure 207.

Si l'on effectue cette construction dans un système de coordonnées obliques, dont l'angle est de 120°, les familles de droites parallèles β et β', γ et γ' feront des angles de 120° avec les droites horizontales et l'abaque sera symétrique (fig. 208).

Coupons les familles de droites parallèles β et β' de l'abaque de la figure 208 par une famille arbitraire de droites α_1 parallèles aux droites α; coupons de même les familles de droites parallèles γ et γ' par une famille de droites α_4 parallèles aux droites α. Traçons les familles de lignes α_2 et α_3 à l'aide des équations $f_{12} = \beta$ et $-f_{13} = \beta'$ dans les réseaux (α_1, β) et (α_1, β') et les familles de lignes α_5 et α_6 à l'aide de l'équation $f_{45} = \gamma$ et $-f_{46} = \gamma'$ dans les réseaux (α_4, γ) et (α_4, γ'). On obtient l'abaque de la figure 209.

La clef est représentée en gras sur la figure 209. Les points A, B, C et D désignent les points des champs (α_1, α_2), (α_1, α_3), (α_4, α_5) et (α_4, α_6) dont les cotes vérifient l'équation (8.25).

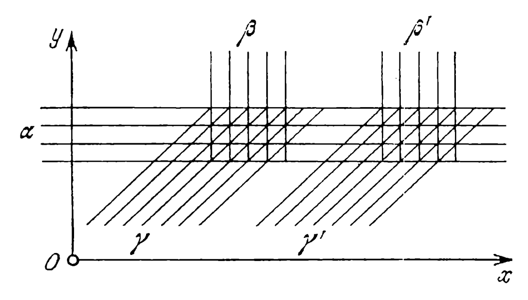


Fig. 206. Schéma d'un abaque à entrecroisement pour les équations $\beta = \alpha + \gamma$ et $\beta' = \alpha + \gamma'$

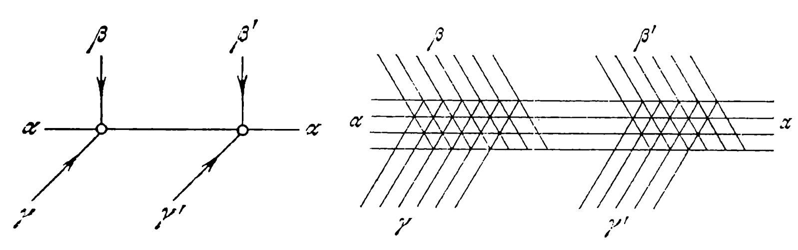


Fig. 207. Clef de l'abaque de la figure 206

Fig. 208. Schéma de l'abaque à entrecroisement pour les équations $\beta = \alpha + \gamma$ et $\beta' = \alpha + \gamma'$, tracé dans un système de coordonnées obliques faisant un angle de 120°

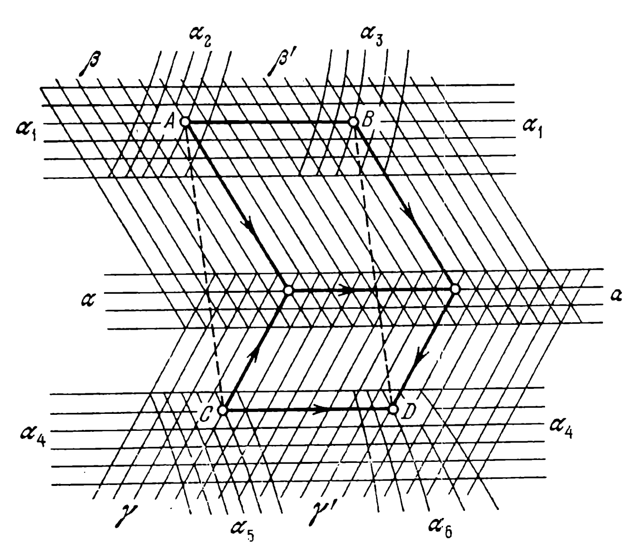


Fig. 209. Schéma d'un abaque à entrecroisement ramifié pour l'équation $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$

L'abaque à entrecroisement de la figure 209 peut être transformé en d'autres types d'abaques plus commodes. Etudions-les.

Abaque au compas. La méthode de construction et d'utilisation de l'abaque de la figure 209 entraîne que $AB = CD$ et $AB \parallel CD$. Donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, i.e. $AC = BD$. Donc pour déterminer le point inconnu D d'après les points donnés A, B et C on peut se servir d'un compas ou d'une règle. Les lignes

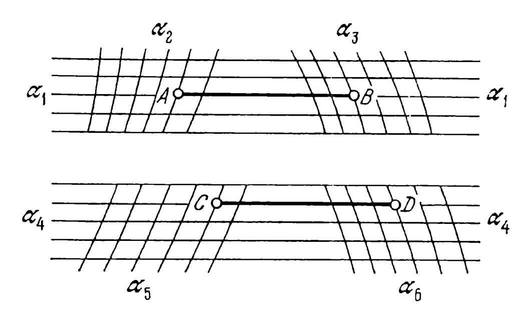


Fig. 210. Schéma de l'abaque au compas pour l'équation $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$, déduit de l'abaque de la figure 209 par suppression des familles de droites parallèles attribuées aux variables auxiliaires α, β, β', γ et γ'

attribuées aux variables auxiliaires α, β, β', γ et γ' deviennent inutiles. On peut les supprimer. Ce faisant on obtient l'abaque de la figure 210 qui porte le nom d'*abaque au compas* ou d'*abaque à report au compas*. L'abaque de la figure 210 est un cas particulier de l'*abaque général au compas* (cf. § 12.1).

Soit à déterminer sur l'abaque 210 la valeur α_6 d'après des valeurs des autres variables. Ce problème se résout de deux façons.

Dans la première, on utilise la condition $AB = CD$. Plaçons une pointe du compas au point A correspondant aux valeurs données α_1, α_2 et l'autre pointe au point B correspondant aux valeurs α_1 et α_3. Sans modifier l'écartement du compas plaçons une pointe en C correspondant aux valeurs données α_4 et α_5 et l'autre sur la droite donnée α_4 au point D. La cote de la ligne α_6 passant par le point D fait connaître α_6.

La deuxième fait appel à la condition $AC = BD$. Plaçons une pointe du compas au point A et l'autre au point C, puis sans modifier l'écartement du compas plaçons une pointe au point B et l'autre sur la droite donnée α_4 au point D. La cote de la ligne α_6 passant par le point D fait connaître α_6.

Abaque à index parallèle. Le quadrilatère $ABCD$ étant un parallélogramme, on utilise le parallélisme de AC et BD pour déterminer le point D. On obtient alors un abaque dans lequel la réponse

est fournie par le tracé d'une droite parallèle à la droite donnée. Un tel abaque s'appelle *abaque à index parallèle*. Il est représenté sur la figure 211. Cet abaque est identique à l'abaque 210, mais le mode d'emploi est différent. Pour définir le point D menons à partir de B une parallèle à AC. Le point de concours de cette droite

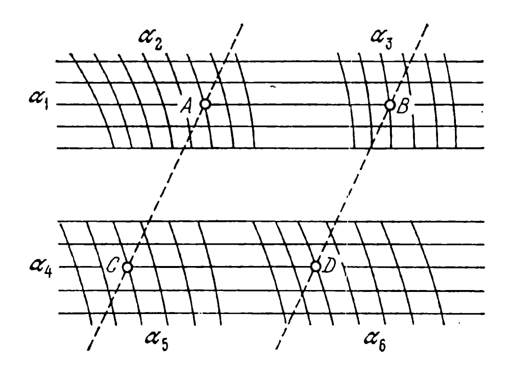


Fig. 211. Schéma de l'abaque à index parallèle pour l'équation $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$, déduit de la figure 209 par suppression des familles de droites parallèles attribuées aux variables auxiliaires α, β, β', γ et γ'

avec la droite donnée α_4 fait connaître le point D, où l'on n'a qu'à lire la réponse α_6. L'abaque à index parallèle de la figure 211 est un cas particulier de l'*abaque général à index parallèle* (cf. § 12.3).

Abaque à points alignés à échelle muette. Si l'abaque à index parallèle de la figure 211 fait l'objet d'une transformation projective, par exemple une homologie, (cf. §§ 7.3, 7.4, 7.5) d'axe parallèle aux droites α_1 et α_4, on obtient deux abaques à points alignés à échelle muette I parallèle à l'axe d'homologie. Ces abaques sont représentés sur les figures 212 et 213. Ils diffèrent l'un de l'autre par la position de l'échelle I. L'antécédent de l'échelle muette I est la droite de l'infini du plan qui contient l'abaque de la figure 211.

Abaque à transparent orienté. Découpons l'abaque de la figure 210 horizontalement en deux parties de telle sorte que l'une d'elles contienne les champs (α_1, α_2) et (α_1, α_3) et l'autre les champs (α_4, α_5) et (α_4, α_6) (cf. fig. 214). Supposons que les éléments de l'abaque de la deuxième partie soient tracés sur du papier transparent. Pour obtenir le point D il faut faire glisser la deuxième feuille sur la première de telle sorte que le point C vienne en coïncidence avec le point A et la droite donnée α_4 avec la droite donnée α_1. Le point B vient alors en coïncidence avec le point D cherché. On utilise donc

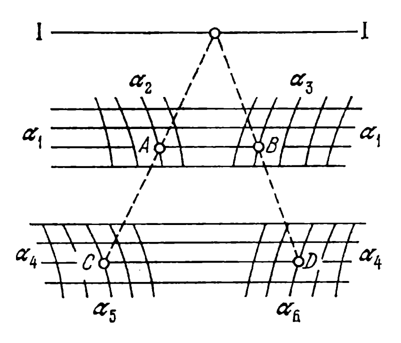


Fig. 212. Schéma de l'abaque à points alignés pour l'équation $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$ à échelle I muette extérieure aux champs binaires, déduit de la figure 211 par une homologie d'axe parallèle aux droites α_1 et α_4

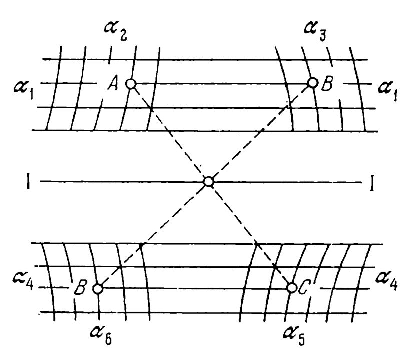


Fig. 213. Schéma de l'abaque à points alignés pour l'équation $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$ à échelle I muette comprise entre les champs binaires, déduit de la figure 211 par une homologie d'axe parallèle aux droites α_1 et α_4

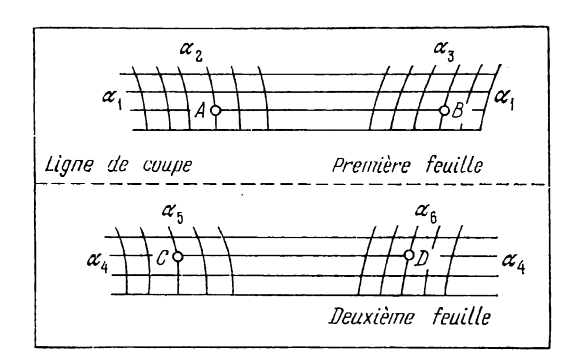
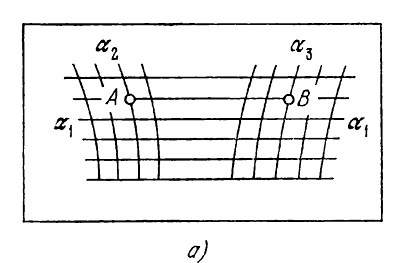
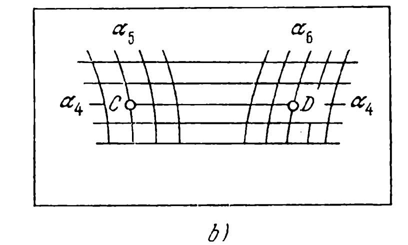


Fig. 214. Découpage de l'abaque de la figure 210 pour en faire un abaque à transparent orienté





a) b)

Fig. 215. Schéma de l'abaque à transparent orienté pour l'équation $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$, déduit de la figure 210: *a*) fond; *b*) transparent

la condition $AB = CD$. L'abaque obtenu entre dans la classe des *abaques à transparent orienté* (cf. § 13.4). Il est représenté sur la figure 215.

Abaque à une translation du transparent. Menons sur l'abaque de la figure 210 une droite I parallèle aux droites α_1 et α_4 et découpons l'abaque verticalement en deux parties de telle sorte que l'une contienne les champs (α_1, α_2), (α_4, α_5) et la droite I et l'autre les

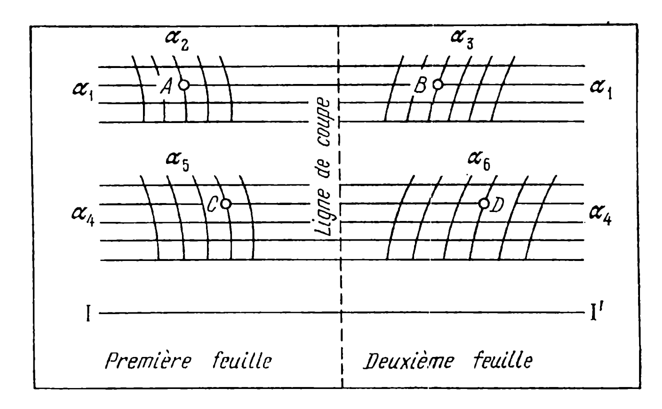


Fig. 216. Découpage de l'abaque de la figure 210 pour en faire un abaque à une translation du transparent

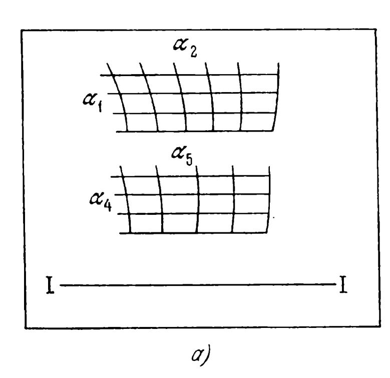
champs (α_1, α_3), (α_4, α_6) et la droite I que nous noterons I' (cf. fig. 216). Supposons que la deuxième feuille est transparente. Pour définir le point D déplaçons la deuxième feuille sur la première de telle sorte que la droite I' glisse sur la droite I et trouvons la position qui amène le point B en coïncidence avec le point A. Le point D cherché est confondu avec C. Donc on utilise ici les conditions $AC = BD$ et $AC \parallel BD$. On peut supprimer les droites α_1 et α_4 sur la deuxième feuille. On obtient alors l'abaque de la figure 217 qui rentre dans la classe des *abaques à une translation du transparent* (cf. § 13.3).

Dans l'abaque de la figure 217 chacune des six variables impliquées dans l'équation (8.25) peut être inconnue. Supposons par exemple qu'il faille chercher α_4 pour des valeurs données des autres variables. En déplaçant le transparent sur le fond de telle sorte que la droite I' glisse sur la droite I, on trouve une position telle que la ligne donnée α_3 passe par le point donné (α_1, α_2). La cote de la droite α_4 passant par le point de concours des lignes données α_5 et α_6 nous fait connaître α_4. La clef de l'abaque s'écrit dans le langage des contacts

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mid - \mid \alpha_3, \quad (\alpha_4, \alpha_5) \mid - \mid \alpha_6, \quad I \mid = \mid I',$$

où $|=|$ est le symbole du *double contact* qui traduit ici la superposition de deux droites.

Possibilités de transformation des abaques. Tous les abaques de la relation (8.25) sont bien adaptés. En construisant l'abaque à entrecroisement initial on peut arbitrairement choisir la loi de



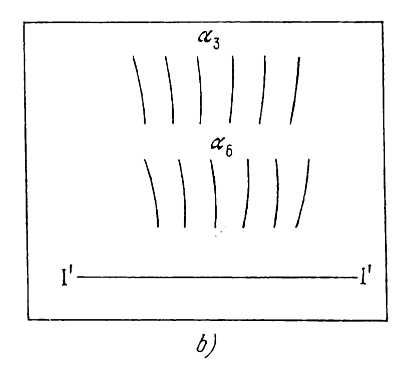


Fig. 217. Schéma de l'abaque à une translation du transparent déduit de la figure 210: *a*) fond; *b*) transparent

distribution des parallèles α_1 et α_4. On peut par ailleurs effectuer la construction dans un système de coordonnées obliques. On peut aussi introduire au préalable dans l'équation initiale (8.25) des fonctions arbitraires P_1 et P_4 et un paramètre a en mettant l'équation sous la forme

$$\bar{f}_{12}+\bar{f}_{13}=\bar{f}_{45}+\bar{f}_{46},$$

où

$$\bar{f}_{12}=f_{12}+P_1, \quad \bar{f}_{13}=f_{13}-P_1+a,$$
$$\bar{f}_{45}=f_{45}+P_4, \quad \bar{f}_{46}=f_{46}-P_4+a.$$

L'abaque au compas de la relation (8.25) est l'un des plus commodes. Dans la suite nous l'appellerons *abaque adapté au compas* à la différence de l'*abaque général au compas* (cf. § 12.1) qui ne l'est pas.

CHAPITRE 9

MÉTHODE DE CONSTRUCTION DES ABAQUES ADAPTÉS À POINTS ÉQUIDISTANTS

§ 9.1. Déduction de la forme canonique fondamentale représentable par un abaque adapté à points équidistants

Etudions maintenant une autre méthode d'obtention d'un abaque adapté à points équidistants pour la forme canonique

$$f_{12} = f_{34} + f_{35} \tag{9.1}$$

qui donne les équations des éléments de l'abaque. Dans la suite on appellera la relation (9.1) *forme canonique fondamentale* représentable par un abaque adapté à points équidistants.

Supposons qu'on ait construit un abaque à points équidistants à champ des centres (α_1, α_2) et à champs des intersections (α_3, α_4),

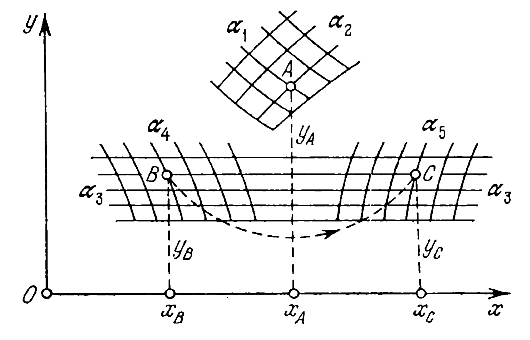


Fig. 218. Schéma d'un abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_{12} = f_{34} + f_{35}$

(α_3, α_5) pour la relation (9.1). Disposons le système de coordonnées xOy de telle sorte que l'axe Ox soit parallèle aux droites α_3 (cf. fig. 218). Désignons par A, B et C les points des champs binaires dont les cotes vérifient l'équation (9.1). Du mode d'emploi de l'abaque il résulte que $AB = AC$. Par ailleurs on a par hypothèse $BC \parallel Ox$. Soient x_A et y_A, x_B et y_B, x_C et y_C les coordonnées respectives des points A, B et C. Les conditions $AB = AC$ et $BC \parallel Ox$ entraînent

$$2x_A = x_B + x_C, \quad y_B = y_C.$$

Posant

$$2x_A = f_{12}, \quad x_B = f_{34}, \quad x_C = f_{35},$$

on est conduit à la forme canonique (9.1).

Trouvons maintenant les équations des éléments de l'abaque. L'équation $2x_A = f_{12}$ donne

$$x_A = 0{,}5 f_{12}.$$

Le mode d'emploi de l'abaque entraîne que l'ordonnée y_A peut être supposée égale à une fonction arbitraire T_{12} des variables α_1 et α_2, et les ordonnées y_B et y_C, égales à une fonction arbitraire T_3 de la variable α_3. Si l'on omet les indices des coordonnées on obtient les équations des éléments de l'abaque figurant dans le tableau 26.

Tableau 26

Coordonnées	Champ des centres (α_1, α_2)	Champ des intersections (α_3, α_4)	Champ des intersections (α_3, α_5)
x	$0{,}5 f_{12}$	f_{34}	f_{35}
y	T_{12}	T_3	T_3

§ 9.2. Méthode de construction d'un abaque adapté à points équidistants pour la forme canonique fondamentale $f_{12} = f_{34} + f_{35}$

Introduisons dans les équations des éléments de l'abaque les paramètres de transformation a_0, a et m et une fonction arbitraire R_3. A cet effet mettons l'équation (9.1) sous la forme

$$2a_0 + 2mf_{12} = [a_0 - a + 2m(f_{34} + R_3)] + [a_0 + a + 2m(f_{35} - R_3)].$$

On obtient une équation du même type:

$$\overline{f}_{12} = \overline{f}_{34} + \overline{f}_{35}.$$

Les nouvelles fonctions $\overline{f}_{12}$, $\overline{f}_{34}$ et $\overline{f}_{35}$ dépendent des paramètres introduits. Les nouvelles équations des éléments de l'abaque sont données dans le tableau 27.

Tableau 27

Coordonnées	Champ des centres (α_1, α_2)	Champ des intersections (α_3, α_4)	Champ des intersections (α_3, α_5)
x	$a_0 + mf_{12}$	$a_0 - a + 2m(f_{34} + R_3)$	$a_0 + a + 2m(f_{35} - R_3)$
y	T_{12}	T_3	T_3

Etudions la signification géométrique des paramètres de transformation et des fonctions arbitraires.

Le paramètre a_0 figure additivement dans l'équation des abscisses du champ des centres et des champs des intersections. Il ne définit donc que la position de l'abaque par rapport à l'origine des coordonnées le long de l'axe des abscisses.

Le paramètre a figure avec des signes opposés uniquement dans l'équation des abscisses des champs des intersections. Donc une variation de ce paramètre laissera invariant le champ des centres et se traduira par une translation des champs des intersections, de même amplitude, le long des axes des abscisses et dans des sens différents.

Il en va de même de la fonction arbitraire R_3 qui figure avec des signes différents dans l'équation des abscisses des champs des intersections. Son introduction se traduit par une translation des champs des intersections le long de l'axe des abscisses, dans les deux sens, les points de mêmes ordonnées se déplaçant d'une même quantité. Le cas $R_3 = \text{const}$ équivaut à l'introduction du paramètre a.

Le paramètre m permet de modifier les dimensions de tous les champs dans la direction de l'axe des abscisses. La fonction arbitraire T_3 définit la loi de distribution des droites parallèles α_3. La fonction arbitraire T_{12} permet de modifier le champ (α_1, α_2) dans la direction de l'axe des ordonnées.

La construction d'un abaque à points équidistants implique le choix des paramètres a_0, m, a et des fonctions arbitraires T_{12}, T_3 et R_3 et s'effectue dans l'ordre suivant.

On choisit les fonctions arbitraires T_{12} et T_3. On peut poser par exemple $T_{12} = T_1$ ou $T_{12} = T_2$. On écrit ensuite les équations des éléments de l'abaque avec $R_3 = 0$, $a_0 = 0$ et $a = 0$. On choisit le module m en fonction des limites de variation des variables et de la dimension de l'épure et on construit les esquisses des champs binaires dans leurs systèmes de coordonnées respectifs. On rassemble les éléments constitutifs de l'abaque eu égard au parallélisme des axes des abscisses et à la coïncidence des droites α_3 dans les champs des intersections. On place le champ des centres (α_1, α_2) à droite du champ des intersections (α_3, α_4). On détermine la position du deuxième champ des intersections (α_3, α_5) en résolvant un exemple numérique. On obtient ainsi l'esquisse de l'abaque.

Une fois l'esquisse tracée on s'assure s'il y a vraiment lieu d'introduire la fonction arbitraire R_3. Parfois on aura intérêt à poser $R_3 = \delta T_3$, où δ est un paramètre arbitraire, dont il faut préciser la valeur convenable. Après avoir choisi l'esquisse de l'abaque on adopte le système commun de coordonnées et on définit d'après cette esquisse les valeurs des paramètres a_0 et a correspondant à la disposition retenue des champs binaires. Ensuite on calcule et on construit l'abaque.

On développera dans la suite la méthode de construction des abaques des cas particuliers importants suivants de la forme (9.1):

$$f_1 = f_2 + f_3, \tag{9.2}$$

$$f_{14} = f_{24} + f_{34}, \tag{9.3}$$

$$f_{12} = f_3 + f_4, \tag{9.4}$$

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4, \tag{9.5}$$

$$f_{12} = f_{34} + f_5, \tag{9.6}$$

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4 + f_5. \tag{9.7}$$

§ 9.3. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_1 = f_2 + f_3$

On supposera que dans la forme (9.2) seules les variables α_2 ou α_3 sont de résolution, la variable α_1 étant toujours parmi les

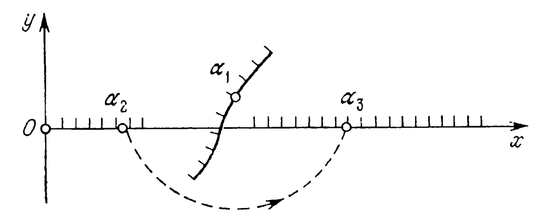


Fig. 219. Schéma d'un abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_1 = f_2 + f_3$

données. L'abaque de cette forme est représenté sur la figure 219, quant aux équations de ses éléments, elles figurent au tableau 28.

Tableau 28

Coordonnées	Echelle des centres α_1	Echelle des intersections α_2	Echelle des intersections α_3
x	$a_0 + mf_1$	$a_0 - a + 2mf_2$	$a_0 + a + 2mf_3$
y	T_1	0	0

T_1 est une fonction arbitraire de la variable α_1, qui permet de placer l'échelle α_1 sur un support quelconque. Si l'on pose $T_1 = 0$, les échelles α_1, α_2 et α_3 seront portées par la même droite.

Exemple 60. Traçons un abaque à points équidistants pour la formule (2.7), où $150 \leqslant T \leqslant 190$ cm, $20 \leqslant A \leqslant 80$ ans, $50 \leqslant P \leqslant 95$ kg.

Ramenons la formule (2.7) à la forme (9.2)

$$0{,}25\,(A-20) = -0{,}75\,(T-150) + (P-50).$$

Posons

$$f_1 = 0{,}25\,(A-20), \quad f_2 = -0{,}75\,(T-150), \quad f_3 = P-50.$$

Les équations des éléments de l'abaque sont définies par le tableau 29.

Tableau 29

Coordonnées	Echelle des centres A	Echelle des intersections T	Echelle des intersections P
x	$a_0+0{,}25m\,(A-20)$	$a_0-a+2m\times$ $\times[-0{,}75\,(T-150)]$	a_0+a+ $+2m\,(P-50)$
y	$T_1\,(A)$	0	0

Il nous faut maintenant choisir les valeurs des paramètres a_0, a, m et la fonction arbitraire $T_1\,(A)$.

Posons provisoirement $a_0 = 0$, $a = 0$ et $T_1 = 0$ et traçons les échelles métriques A, T et P pour $m = 1$ mm. Les échelles auront

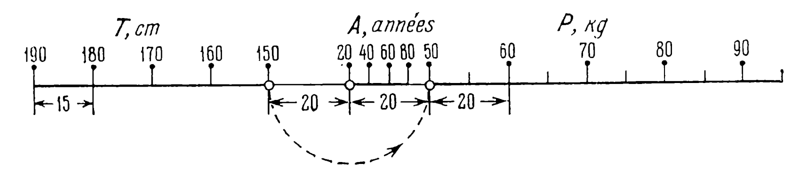


Fig. 220. Abaque adapté à points équidistants pour la formule (2.7) à échelles situées sur une même droite

des dimensions commodes pour cette valeur de m. Les modules des échelles A, T et P seront respectivement égaux à 0,25 mm, 1,5 mm et 2 mm.

Menons une droite (fig. 220), support commun des échelles A, T et P. Plaçons l'échelle T à gauche, et, à sa droite, à une distance de 20 mm du point de cote $T = 150$ cm, le point de cote $A = 20$ ans. Mettons en place l'échelle P en résolvant un exemple numérique. Pour $T = 150$ cm et $A = 20$ ans, on a $P = 50$ kg. Donc en vertu de la clef, le point de cote $P = 50$ kg se trouve à la même distance du point $A = 20$ ans que le point $T = 150$ cm, i.e. les points $A = 20$ ans et $P = 50$ kg sont distants de 20 mm. Portons cette distance et traçons l'échelle P. L'inconvénient de cet abaque est le faible module de l'échelle A. Il est facile d'y pallier

à l'aide de la fonction arbitraire $T_1(A)$ que nous supposerons égale à zéro pour l'instant.

Elevons des verticales par les points de l'échelle A (fig. 220) et coupons-les par une oblique. On obtient une échelle A plus aérée.

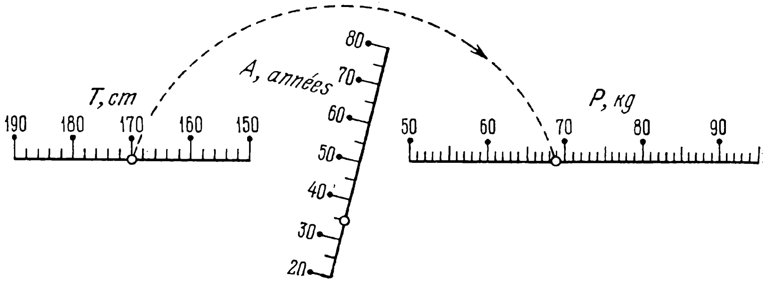


Fig. 221. Abaque pour la formule (2.7), obtenu en remplaçant l'échelle horizontale A par l'échelle oblique A dans l'abaque de la figure 220

La substitution de l'échelle oblique A à l'horizontale nous fournit un abaque plus commode à la lecture. L'abaque de la figure 221 correspond à l'exemple numérique: $A = 35$ ans, $T = 170$ cm; réponse $P = 69$ kg.

§ 9.4. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_{14} = f_{24} + f_{34}$

L'abaque à points équidistants de la forme canonique (9.3) est représenté sur la figure 222. Il est composé d'une famille de

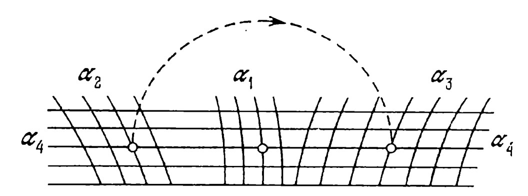


Fig. 222. Schéma d'un abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_{14} = f_{24} + f_{34}$

droites parallèles α_4 coupée par des familles de lignes α_2, α_1 et α_3. La variable α_4 est commune au champ des centres (α_1, α_4) et aux champs des intersections (α_2, α_4) et (α_3, α_4). On admet que les variables α_1 et α_4 figurent toujours parmi les données. Seules les variables α_2 ou α_3 peuvent être inconnues. Pour $\alpha_4 =$ const, la forme (9.3) se transforme en la forme (9.2) étudiée précédemment.

Les équations des éléments de l'abaque figurent au tableau 30. Dans ce tableau P_4, Q_4, R_4 et T_4 sont des fonctions arbitraires de

Tableau 30

Coordonnées	Champ des centres (α_1, α_4)	Champ des intersections (α_2, α_4)	Champ des intersections (α_3, α_4)
x	$P_4+Q_4f_{14}$	$P_4-R_4+2Q_4f_{24}$	$P_4+R_4+2Q_4f_{34}$
y	T_4	T_4	T_4

la variable α_4. L'introduction de ces quatre fonctions arbitraires dans les équations des éléments de l'abaque rend ce dernier bien adaptable. On remarquera qu'on pourrait remplacer la famille de droites parallèles α_4 par la famille de droites

$$y = S_4x + T_4,$$

où S_4 et T_4 sont des fonctions arbitraires de la variable α_4. Mais, dans la pratique, on peut parfaitement considérer que $y = T_4$, i.e. remplacer la famille de droites α_4 par une famille de droites parallèles.

La formule d'interpolation (6.28) utilisée pour une interpolation linéaire successive dans une case tabulaire à trois entrées, se ramène à la forme (9.3). La variable t est assimilée à l'inconnue α_3. Pour variables α_1, α_2 et α_4, on peut prendre une combinaison quelconque des variables u, v et w. Supposons que les variables α_1, α_2 et α_4 sont figurées respectivement par u, v et w. La formule (6.28) se ramène alors à la forme canonique (9.3) de la manière suivante. Ecrivons la formule (6.28) comme suit

$$t = \bar{A}uv + \bar{B}u + \bar{C}v + \bar{H}, \tag{9.8}$$

où

$$\bar{A} = Aw + B, \quad \bar{B} = Dw + E, \quad \bar{C} = Cw + F, \quad \bar{H} = Gw + H.$$

Transformons identiquement le second membre de l'équation (9.8)

$$(\bar{A}u + x_0)(v + y_0) + z_0,$$

où x_0, y_0 et z_0 sont des constantes déduites des identités

$$\bar{A}uv + \bar{B}u + \bar{C}v + \bar{H} \equiv (\bar{A}u + x_0)(v + y_0) + z_0.$$

Il suit

$$x_0 = \bar{C}, \quad y_0 = \frac{\bar{B}}{\bar{A}}, \quad z_0 = \bar{H} - \frac{\bar{B}\bar{C}}{\bar{A}}.$$

La formule (9.8) s'écrit alors

$$t = (\bar{A}u + \bar{C})\left(v + \frac{\bar{B}}{\bar{A}}\right) + \bar{H} - \frac{\bar{B}\bar{C}}{\bar{A}}.$$

ou

$$\bar{A}t + \bar{B}\bar{C} - \bar{A}\bar{H} = (\bar{A}u + \bar{C})(\bar{A}v + \bar{B}).$$

Prenons le logarithme de cette équation

$$-\log(\bar{A}u + \bar{C}) = \log(\bar{A}v + \bar{B}) - \log(\bar{A}t + \bar{B}\bar{C} - \bar{A}\bar{H}),$$

où

$$f_{14} = -\log(\bar{A}u + \bar{C}), \quad f_{24} = \log(\bar{A}v + \bar{B}),$$
$$f_{34} = -\log(\bar{A}t + \bar{B}\bar{C} - \bar{A}\bar{H}).$$

Ces formules sont valables si $\bar{A} = Aw + B \neq 0$. Si $\bar{A} = 0$, la formule d'interpolation (9.8) prend la forme simple

$$t = \bar{B}u + \bar{C}v + \bar{H}$$

et se réduit à la forme (9.3) sans la prise de logarithme

$$\bar{B}u = (-\bar{C}v - \bar{H}) + t.$$

Ici

$$f_{14} = \bar{B}u, \quad f_{24} = -\bar{C}v - \bar{H}, \quad f_{34} = t.$$

Exemple 61. Traçons un abaque à points équidistants pour le tableau 24 dans l'hypothèse où celui-ci admet une interpolation linéaire sur chaque variable.

La formule d'interpolation qui remplace le tableau 24 s'écrit

$$t = -0{,}02uv + 100vw + 9uw - 1{,}17u + 30v - 9400w + 2844.$$

En la comparant avec la formule (6.28) on déduit que $A = 0$; $B = -0{,}02$; $C = 100$; $D = 9$; $E = -1{,}17$; $F = 30$; $G = -9400$; $H = 2844$.

On tracera un abaque à champ des centres (u, w) et à champs des intersections (v, w) et (t, w). On posera donc dans la forme (9.8): $\alpha_1 = u$; $\alpha_2 = v$; $\alpha_3 = t$; $\alpha_4 = w$. On trouve alors $\bar{A} = Aw + B = -0{,}02$; $\bar{B} = Dw + E = 9w - 1{,}17$; $\bar{C} = Cw + F = 100w + 30$; $\bar{H} = Gw + H = -9400w + 2844$;

$$f_{14} = -\log(\bar{A}u + \bar{C}) = -\log(-0{,}02u + 100w + 30);$$
$$f_{24} = \log(\bar{A}v + \bar{B}) = \log(-0{,}02v + 9w - 1{,}17);$$
$$f_{34} = -\log(\bar{A}t + \bar{B}\bar{C} - \bar{A}\bar{H}) = -\log[-0{,}02t + (9w - 1{,}17)(100w + 30) + 0{,}02(-9400w + 2844)].$$

Prenons les fonctions arbitraires suivantes:

$$Q_4 = 1000, \quad P_4 = 1650 - 1180\,(0{,}21 - w),$$
$$R_4 = 1080 - 16140\,(0{,}21 - w), \quad T_4 = 5000\,(w - 0{,}20).$$

La figure 223 représente l'abaque construit d'après les équations du tableau 30 pour les fonctions f_{14}, f_{24}, f_{34}, Q_4, P_4, R_4 et T_4

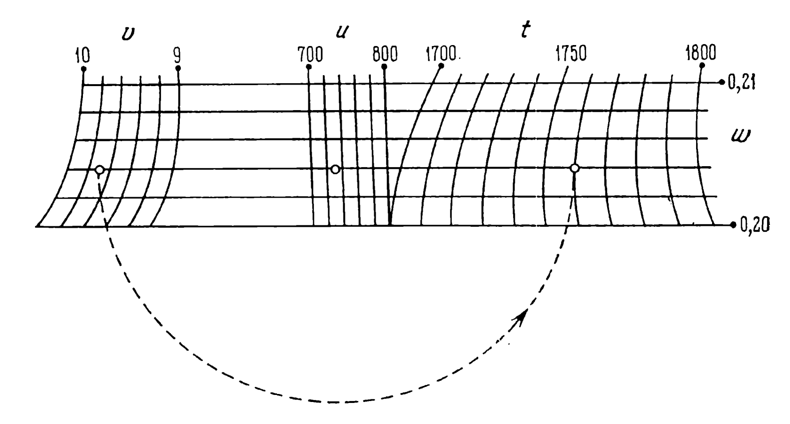


Fig. 223. Abaque tracé d'après le schéma de la figure 222 pour la formule d'interpolation $t = -0{,}02uv + 100vw + 9uw - 1{,}17u + 30v - 9400w + 2844$

exhibées, dans les intervalles de variation des variables correspondant au tableau 24. L'arc de cercle en pointillé correspond à la solution de l'exemple numérique: $u = 730$, $v = 9{,}7$, $w = 0{,}204$; réponse $t=1760$.

§ 9.5. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_{12} = f_3 + f_4$

La forme (9.4) se rencontre fréquemment dans la pratique. L'abaque à points équidistants qui la représente est plus souple que l'abaque à points alignés à échelle binaire, étudié au § 6.17. L'abaque est représenté sur la figure 224. Les équations des éléments contenant les paramètres de transformation figurent au tableau 31.

Tableau 31

Coordonnées	Champ des centres (α_1, α_2)	Echelle des intersections α_3	Echelle des intersections α_4
x	$a_0 + mf_{12}$	$a_0 - a + 2mf_3$	$a_0 + a + 2mf_4$
y	T_{12}	0	0

Exemple 62. Construisons un abaque de ce type pour la détermination de la perte de pression ΔP dans des conduites de gaz de

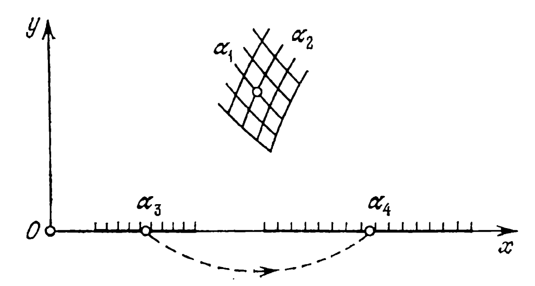


Fig. 224. Schéma d'un abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_{12} = f_3 + f_4$

faible pression, en acier, transportant du gaz naturel sous des conditions normales [43]. La formule de calcul est

$$\Delta P = lF(Q, d), \tag{9.9}$$

pour

$$F(Q, d) = 1{,}21\frac{Q}{d^4} \text{ pour } Q < 0{,}808d,$$

$$F(Q, d) = 1{,}58\frac{Q^{2,333}}{d^{5,333}} \text{ pour } 0{,}808d \leqslant Q \leqslant 1{,}62d,$$

$$F(Q, d) = 5{,}11\left(\frac{0{,}01}{d} + 0{,}0274\frac{d}{Q}\right)^{0,25}\frac{Q^2}{d^5} \text{ pour } Q > 1{,}62d.$$

Ici ΔP est la perte de pression au frottement en kgf/m²; Q le débit du gaz en m³/h; d le diamètre intérieur des conduites en cm; l la longueur d'un tronçon en m.

Les intervalles de variation sont: $1 \leqslant d \leqslant 200$ cm, $0{,}1 \leqslant Q \leqslant 5 \cdot 10^4$ m³/h, $1 \leqslant l \leqslant 1000$ m, $0{,}01 \leqslant \Delta P \leqslant 500$ kgf/m².

En prenant le logarithme de l'équation (9.9) on la ramène à la forme (9.4)

$$\log F(Q, d) = -\log l + \log \Delta P.$$

Il vient

$$f_{12} = \log F(Q, d), \quad f_3 = -\log l, \quad f_4 = \log \Delta P.$$

Posons $a_0 = 0$, $m = 15$ mm, $a = -60$ mm, $T_{12} = 40 + 25 \log Q$. L'abaque correspondant est tracé sur la figure 225. Il représente la solution de l'exemple numérique: $Q = 1000$ m³/h, $d = 300$ mm, $l = 100$ m; réponse $\Delta P = 3{,}8$ kgf/m².

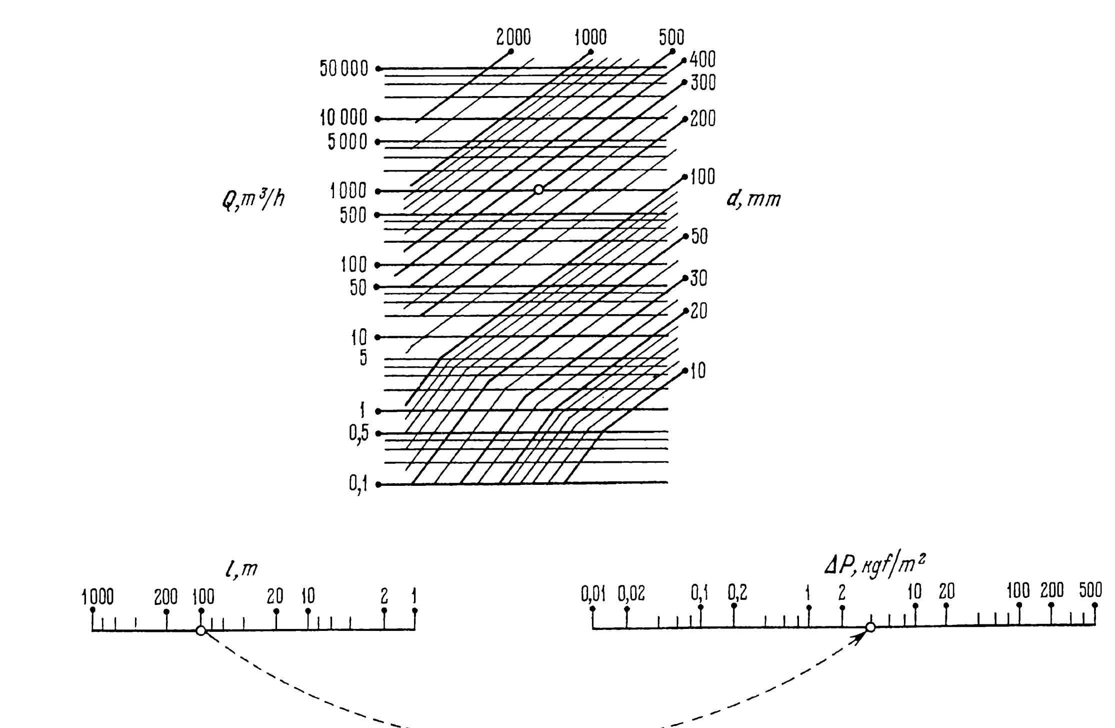


Fig. 225. Abaque tracé d'après le schéma de la figure 224 pour la formule (9.9)

§ 9.6. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$

La forme (9.5) est un cas particulier de la forme (9.4). Donc, son abaque est celui de la figure 224, et les équations de ses éléments, celles du tableau 31 sous réserve que $f_{12} = f_1 + f_2$.

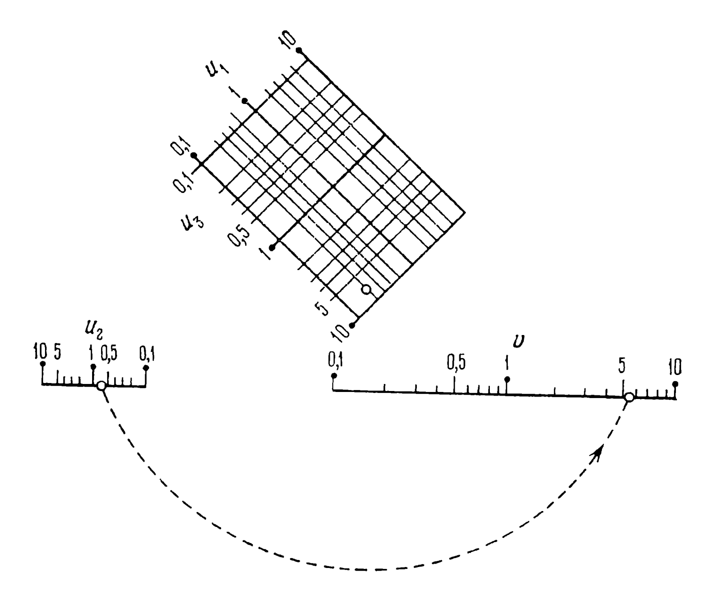


Fig. 226. Abaque tracé d'après le schéma de la figure 224 pour la formule $v = 2{,}5u_1^{0,6}u_2^{0,3}u_3^{0,9}$

Le trait remarquable de cet abaque est la possibilité de représenter le champ (α_1, α_2) par un réseau orthogonal. A cet effet il faut prendre la fonction arbitraire T_{12} de la forme

$$T_{12} = b_0 + m\,(f_1 - f_2).$$

En effet, en éliminant successivement les fonctions f_2 et f_1 entre les équations

$$x = a_0 + m\,(f_1 + f_2), \quad y = b_0 + m\,(f_1 - f_2)$$

du champ (α_1, α_2) on obtient

$$x + y = a_0 + b_0 + 2mf_1, \qquad x - y = a_0 - b_0 + 2mf_2.$$

Ce sont les équations d'un réseau orthogonal de droites α_1 et α_2

Exemple 63. Traçons un abaque de ce type pour la formule

$$v = 2{,}5 u_1^{0,6} u_2^{0,3} u_3^{0,9} \tag{9.10}$$

sur les intervalles $0{,}1 \leqslant u_1,\ u_2,\ u_3 \leqslant 10$, $0{,}1 \leqslant v \leqslant 10$.

En prenant le logarithme de l'équation (9.10), on la ramène à la forme (9.5)

$$0{,}6 \log u_1 + 0{,}9 \log u_3 = (-0{,}3 \log u_2) + (-\log 2{,}5 + \log v).$$

On obtient les expressions suivantes pour les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4

$$f_1 = 0{,}6 \log u_1, \quad f_2 = 0{,}9 \log u_3, \quad f_3 = -0{,}3 \log u_2,$$
$$f_4 = -\log 2{,}5 + \log v.$$

Dans le tableau 31 posons $f_{12} = f_1 + f_2$, $T_{12} = b_0 + m(f_1 - f_2)$, $a_0 = 0$, $m = 25$ mm, $b_0 = 50$ mm, $a = 70$ mm. L'abaque correspondant est celui de la figure 226. L'arc de cercle en pointillé représente la solution de l'exemple: $u_1 = 0{,}2$, $u_2 = 0{,}7$, $u_3 = 7{,}7$; réponse $v = 5{,}4$.

§ 9.7. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_{12} = f_{34} + f_5$

Un trait remarquable de la forme (9.6) est la possibilité de représenter dans son abaque l'une quelconque des variables α_1, α_2, α_3 ou α_4 par une famille de droites horizontales. La figure 218 représente l'abaque correspondant au cas où la variable α_3 est figurée par une famille de droites horizontales, et les équations des éléments, par le tableau 27, dans lequel on prendra soin de remplacer f_{35} par f_5. Si la fonction $R_3 = \delta T_3$, où δ est un paramètre, la famille α_5 sera une famille de droites parallèles. Pour le reste la méthode de représentation de la forme (9.6) par un abaque est la même que pour la forme fondamentale (9.1).

Exemple 64. Traçons un abaque de ce type [70] pour le calcul de la profondeur critique dans des canaux trapézoïdaux à l'aide de l'équation (2.13). Mettons cette équation sous la forme

$$\frac{\alpha Q^2}{9{,}81} = b^5 \frac{\left(1 + m\frac{h_{\text{cr}}}{b}\right)^3 \left(\frac{h_{\text{cr}}}{b}\right)^3}{1 + 2m\frac{h_{\text{cr}}}{b}}$$

et posons

$$\eta_{\text{cr}} = \frac{h_{\text{cr}}}{b},$$

où η_{cr} est le niveau critique. On obtient l'équation

$$\frac{\alpha Q^2}{9{,}81} = b^5 \frac{(1 + m\eta_{\text{cr}})^3 \eta_{\text{cr}}^3}{1 + 2m\eta_{\text{cr}}}. \tag{9.11}$$

Traçons l'abaque de l'équation (9.11) pour déterminer η_{cr} dans les intervalles suivants de variation des variables: $1 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}1$; $1 \leqslant b \leqslant 5$ m; $0 \leqslant m \leqslant 3$; $1 \leqslant Q \leqslant 50$ m³/s; $0{,}1 \leqslant \eta_{cr} \leqslant 2$. Pour abréger posons

$$F(m, \eta_{cr}) = 9{,}81 \frac{(1+m\eta_{cr})^3 \eta_{cr}^3}{1+2m\eta_{cr}},$$

l'équation (9.11) devient

$$\alpha Q^2 = b^5 F(m, \eta_{cr}).$$

En prenant le logarithme des deux membres de cette équation, on obtient

$$\log \frac{\alpha}{b^5} = -\log Q^2 + \log F(m, \eta_{cr}),$$

qui est de la forme $f_{12} = f_4 + f_{35}$, laquelle ne diffère de la forme (9.6) que par la notation des fonctions.

Les équations des éléments de l'abaque sont définies par le tableau 27. Posons $f_{12} = \log \alpha/b^5$, $f_{34} = -\log Q^2$, $f_{35} = \log F(m, \eta_{cr})$, $a_0 = 40$ mm, $a = 40$ mm, $\overline{m} = 10$ mm (on a désigné le paramètre m par $\overline{m}$ pour le distinguer de la variable m), $T_{12} = T_{\alpha, b} = 40 + 250 \log \alpha$, $R_3 = R_m = 0{,}2\, m$, $T_3 = T_m = 8\, m$. L'abaque est représenté sur la figure 63 (cf. Introduction page 10).

§ 9.8. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_1 + f_2 = f_3 + f_4 + f_5$

Les équations des éléments de l'abaque de la forme (9.7) se déterminent à partir du tableau 31 en y posant $f_{12} = f_1 + f_2$, $f_{34} = f_3 + f_4$, $f_{35} = f_5$. Comme précédemment prenons la fonction T_{12} de la forme

$$T_{12} = b_0 + m(f_1 - f_2).$$

Le champ (α_1, α_2) sera alors constitué de deux familles de droites orthogonales.

On a intérêt à poser

$$T_3 = c + nf_3, \quad R_3 = \delta f_3,$$

où c, n et δ sont des paramètres. Les familles de lignes α_4 et α_5 seront des familles de droites parallèles.

En effet, en éliminant la fonction f_3 entre les équations

$$x = a_0 - a + 2m(f_3 + f_4 + \delta f_3), \quad y = c + nf_3$$

du champ (α_3, α_4), on obtient l'équation de la famille de droites parallèles

$$x - \frac{2m(1+\delta)}{n} y - a_0 + a + \frac{2m(1+\delta)c}{n} - 2mf_4 = 0. \qquad (9.12)$$

En éliminant la fonction f_3 entre les équations

$$x = a_0 + a + 2m\,(f_5 - \delta f_3), \quad y = c + nf_3$$

du champ (α_3, α_5), on obtient l'équation des droites parallèles α_5

$$x + \frac{2m\delta}{n}\, y - a_0 - a - \frac{2m\delta c}{n} - 2mf_5 = 0. \qquad (9.13)$$

Déterminons maintenant la valeur du paramètre δ pour laquelle les familles de droites parallèles α_4 et α_5 définies par les équations (9.12) et (9.13) seront parallèles entre elles. Dans ce cas l'angle que feront les droites α_4 et α_5 avec les droites α_3 sera le plus voisin d'un angle droit et assurera la meilleure précision à l'abaque. Egalons les coefficients angulaires des droites α_4 et α_5:

$$\frac{n}{2m\,(1+\delta)} = -\frac{n}{2m\delta}.$$

Il vient $\delta = -0{,}5$.

En portant les expressions des fonctions f_{12}, f_{34}, f_{35}, T_{12}, T_3 et R_3 dans le tableau 27, on obtient le tableau 32. La projection

Tableau 32

Coordonnées	Champ des centres (α_1, α_2)	Champ des intersections (α_3, α_4)	Champ des intersections (α_3, α_5)
x	$a_0 + m(f_1 + f_2)$	$a_0 - a + 2m\,(f_4 + 0{,}5f_3)$	$a_0 + a + 2m\,(f_5 + 0{,}5f_3)$
y	$b_0 + m(f_1 - f_2)$	$c + nf_3$	$c + nf_3$

de l'abaque implique le choix des six paramètres a_0, b_0, c, a, m et n.

Exemple 65. Tracer un abaque pour la formule

$$\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \qquad (9.14)$$

la variable cherchée étant α_5. Les intervalles de variation sont: $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \leqslant 5$; $0 \leqslant \alpha_5 \leqslant 20$.

Ramenons l'équation (9.14) à la forme (9.7)

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (-\alpha_3) + (-\alpha_4) + \alpha_5.$$

Il vient

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad f_3 = -\alpha_3, \quad f_4 = -\alpha_4, \quad f_5 = \alpha_5.$$

L'abaque construit avec les équations du tableau 32 pour $a_0 = 0$, $a = 15$ mm, $b_0 = 45$ mm, $c = 0$, $m = 2{,}5$ mm, $n = 5$ mm est

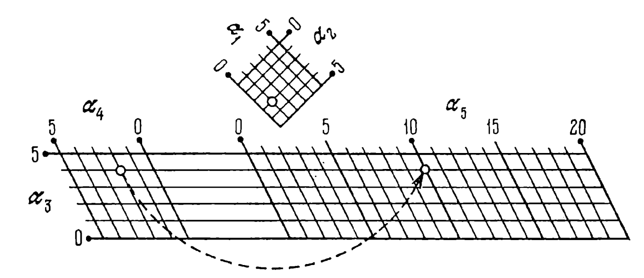


Fig. 227. **Abaque tracé** d'après le schéma de la figure 218 pour la formule $\alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

représenté sur la figure 227. L'arc en pointillé représente la solution de l'exemple numérique: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, $\alpha_4 = 2$; réponse $\alpha_5 = 10$.

§ 9.9. Abaques adaptés à points équidistants pour un système d'équations

Les abaques à points équidistants peuvent être appliqués à la représentation de systèmes d'équations. Etudions le cas où le système est résolu par plusieurs intersections à partir d'un même centre.

Soit le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} f_{12} &= f_{34} + f_{35}, \\ f_{12} &= f_{67} + f_{68}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f_{12} &= f_{n-2,\, n-1} + f_{n-2,\, n}. \end{aligned}\right\} \quad (9.15)$$

Chaque équation du système (9.15) est susceptible d'être représentée par un abaque du type de la figure 218. Les champs des centres de tous ces abaques peuvent être rendus identiques, car toutes les équations ont un premier membre commun, la fonction f_{12}. En superposant ces abaques de telle sorte que les champs des centres viennent en coïncidence, on obtient un abaque sur lequel la solution du système d'équations est donnée par des tracés d'arcs à partir d'un centre unique.

Le cas particulier où le système (9.15) n'est composé que des deux équations

$$f_{12} = f_{34} + f_{35}, \quad f_{12} = f_{67} + f_{68}, \qquad (9.16)$$

est important dans les applications pratiques.

Les équations des éléments de l'abaque du système (9.16) s'écrivent :

champ des centres (α_1, α_2):

$$x = a_0 + mf_{12}, \quad y = T_{12}; \tag{9.17}$$

champ des intersections (α_3, α_4):

$$x = a_0 - a + 2m\,(f_{34} + R_3), \quad y = T_3; \tag{9.18}$$

champ des intersections (α_3, α_5):

$$x = a_0 + a + 2m\,(f_{35} - R_3), \quad y = T_3; \tag{9.19}$$

champ des intersections (α_6, α_7):

$$x = a_0 - a' + 2m\,(f_{67} + R_6), \quad y = T_6; \tag{9.20}$$

champ des intersections (α_6, α_8):

$$x = a_0 + a' + 2m\,(f_{68} - R_6), \quad y = T_6. \tag{9.21}$$

Exemple 66. Traçons un abaque de ce type pour le système d'équations [70]

$$M = bx\,R_f\,(h_0 - 0{,}5\,x), \quad R_aF_a = bxR_f \tag{9.22}$$

sous réserve que

$$x \leqslant 0{,}55h_0. \tag{9.23}$$

Ce système décrit le calcul de poutres en béton armé, de section rectangulaire, à armature simple, d'après la méthode des états limites théoriques. M est le moment fléchissant en kg·cm; b la largeur de la poutre en cm; h_0 la distance de l'extrémité supérieure de la poutre au centre de gravité de l'armature en cm; F_a l'aire de la section transversale de l'armature en cm²; x la hauteur de la zone de compression du béton en cm; R_f la résistance théorique du béton à la compression pendant la flexion en kg/cm²; R_a la résistance théorique de l'armature à la traction en kg/cm².

Les intervalles de variation sont : $10 \leqslant b \leqslant 500$ cm; $0{,}1 \leqslant M \leqslant 100$ tm; $1000 \leqslant R_a \leqslant 5000$ kg/cm²; $10 \leqslant R_f \leqslant 400$ kg/cm²; $2 \leqslant x \leqslant 150$ cm; $3 \leqslant h_0 \leqslant 300$ cm; $2 \leqslant F_a \leqslant 100$ cm².

La forme logarithmique du système d'équations (9.22) s'apparente à la forme (9.16)

$$\log(bR_f) = \log M - \log[x\,(h_0 - 0{,}5x)], \quad \log(bR_f) = \log F_a + \log\frac{R_a}{x}.$$

Posons

$$f_{12} = \log(bR_f), \quad f_{34} = \log M, \quad f_{35} = -\log[x\,(h_0 - 0{,}5x)],$$

$$f_{67} = \log F_a, \quad f_{68} = \log\frac{R_a}{x}, \quad \alpha_1 = b, \quad \alpha_2 = R_f, \quad \alpha_3 = h_0,$$

$$\alpha_4 = M, \quad \alpha_5 = x, \quad \alpha_6 = R_a, \quad \alpha_7 = F_a, \quad \alpha_8 = x.$$

L'abaque est représenté sur la figure 228. Pour le tracer, on a fait intervenir dans les équations (9.17) à (9.21) les valeurs des paramètres et les fonctions arbitraires suivantes: $m = 15$ mm, $a_0 = -60$ mm,

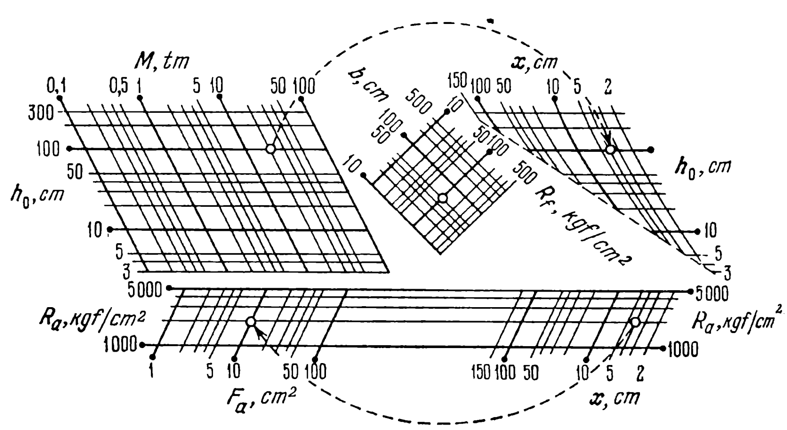


Fig. 228. Abaque adapté à points équidistants pour la résolution du système d'équations (9.22) avec la condition (9.23)

$a = 167$ mm, $a' = 95$ mm, $T_{12} = 60 + 15 (\log b - \log R_f)$, $T_3 = 13 + 30 \log h_0$, $R_3 = -0{,}5 \log h_0$, $T_6 = -90 + 30 \log R_a$, $R_6 = 0{,}5 \log R_a$. Au signe d'égalité de la condition (9.23) correspond la droite tracée en pointillé dans le champ binaire (h_0, x). Elle a pour équations paramétriques

$$\bar{x} = 118{,}1 - 45 \log h_0, \quad \bar{y} = 13 + 30 \log h_0.$$

L'abaque donne la solution de l'exemple numérique:

$M = 20$ tm, $h_0 = 100$ cm, $b = 50$ cm, $R_f = 100$ kg/cm², $R_a = 2000$ kg/cm²; réponse: $x = 4{,}1$ cm, $F_a = 10{,}2$ cm².

§ 9.10. Abaques composés adaptés à points équidistants

Les *abaques composés à points équidistants* se prêtent bien à la représentation des relations à plusieurs variables de la forme

$$f_{12} + f_{1,n} = f_{34} + f_{56} + \ldots + f_{n-2,\,n-1}. \tag{9.24}$$

Considérons deux méthodes de représentation de la relation

$$f_{12} + f_{17} = f_{34} + f_{56}, \tag{9.25}$$

qui est un cas particulier de (9.24). Dans la première, les éléments communs de l'abaque composé seront le champ des intersections et le champ des centres, dans la seconde, les champs des intersections.

Abaque composé à champs des intersections et des centres communs. Introduisons la variable auxiliaire α en posant

$$f_{12} + f_{17} = f_{34} + f_{56} = \alpha.$$

Mettons les équations obtenues sous la forme

$$f_{34} = -f_{56} + \alpha, \tag{9.26}$$

$$\alpha = f_{12} + f_{17} \tag{9.27}$$

et représentons-les par des abaques à points équidistants. L'abaque de l'équation (9.26) sera constitué d'une famille verticale de droites

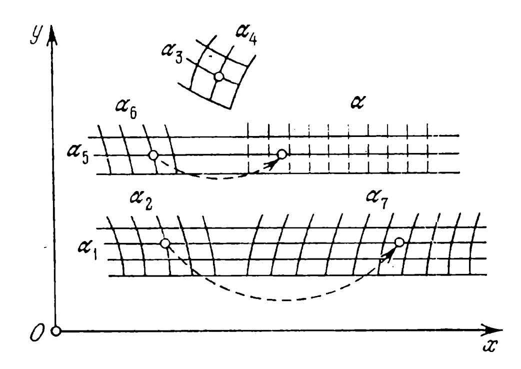


Fig. 229. Schéma d'un abaque adapté à points équidistants pour l'équation $f_{12} + f_{17} = f_{34} + f_{56}$ à champs des intersections et des centres (α_5, α) communs

des intersections α, celui de l'équation (9.27) d'une échelle des centres α, qui est susceptible d'être remplacée par une famille de droites verticales α confondues avec la famille de droites α du premier abaque. En regroupant ces deux abaques, on obtient l'*abaque composé à champs des intersections et des centres communs* de la figure 229. La famille de droites α est figurée en pointillé. On peut ne pas la tracer.

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

champ des centres (α_3, α_4):

$$x = a_0 + mf_{34}, \quad y = T_{34};$$

champ des intersections (α_5, α_6):

$$x = a_0 - a - 2mf_{56}, \quad y = T_5;$$

champ des intersections et deuxième champ des centres (α_5, α):

$$x = a_0 + a + 2m\alpha, \quad y = T_5;$$

champ des intersections (α_1, α_2):

$$x = a_0 + a - a' + 4m\,(f_{12} + R_1), \quad y = T_1;$$

champ des intersections (α_1, α_7):

$$x = a_0 + a + a' + 4m(f_{17} - R_1), \quad y = T_1.$$

Le trait remarquable de cet abaque est que ses éléments possèdent des modules croissant dans le sens de l'axe des abscisses, à savoir m, $2m$, $4m$.

Abaque composé à champs des intersections communs. Mettons l'équation (9.25) sous la forme

$$f_{12} - f_{34} = -f_{17} + f_{56} = \alpha,$$

où α est une variable auxiliaire et représentons les équations obtenues

$$-f_{34} = -f_{12} + \alpha, \tag{9.28}$$

$$f_{56} = \alpha + f_{17} \tag{9.29}$$

par des abaques à points équidistants ayant le champ des intersections (α_1, α) en commun. L'abaque est représenté sur la figure 230.

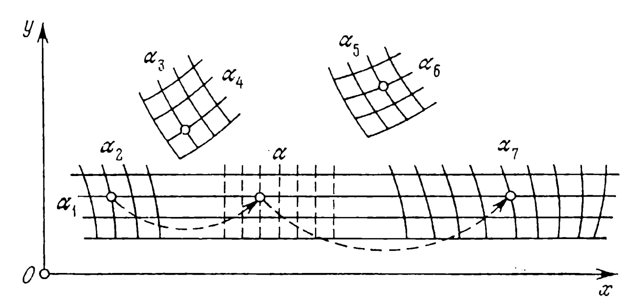


Fig. 230. Schéma d'un abaque adapté à points équidistants pour l'équation $f_{12} + f_{17} = f_{34} + f_{56}$ à champs des intersections (α_1, α) communs

C'est un *abaque composé à champs des intersections communs.* En portant dans les équations (9.28) et (9.29) les paramètres de transformation et une fonction arbitraire, on obtient:

$$[2a_0 + 2m(-f_{34})] = [a_0 - a + 2m(-f_{12} + R_1)] + \\ + [a_0 + a + 2m(\alpha - R_1)],$$

$$[2a_0' + 2mf_{56}] = [a_0 + a + 2m(\alpha - R_1)] + \\ + [2a_0' - a_0 - a + 2m(f_{17} + R_1)].$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent donc:

champ des centres (α_3, α_4):

$$x = a_0 - mf_{34}, \quad y = T_{34}; \tag{9.30}$$

champ des intersections (α_1, α_2):

$$x = a_0 - a + 2m(-f_{12} + R_1), \quad y = T_1; \qquad (9.31)$$

champ des intersections (α_1, α):

$$x = a_0 + a + 2m(\alpha - R_1), \quad y = T_1; \qquad (9.32)$$

champ des centres (α_5, α_6):

$$x = a_0' + mf_{56}, \quad y = T_{56}; \qquad (9.33)$$

champ des intersections (α_1, α_7):

$$x = 2a_0' - a_0 - a + 2m(f_{17} + R_1), \quad y = T_1. \qquad (9.34)$$

Le trait remarquable de cet abaque est que ses éléments n'auront que deux modules distincts sur l'axe des abscisses, plus exactement

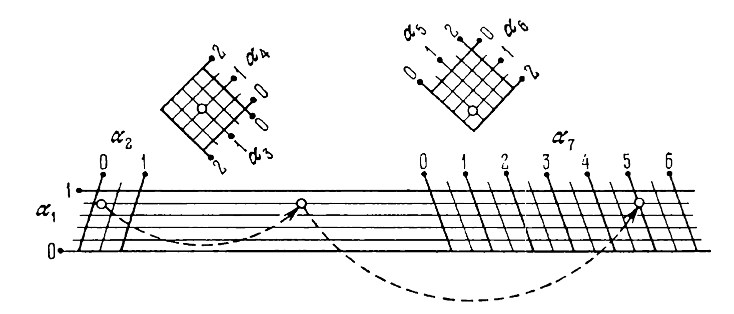


Fig. 231. Abaque tracé d'après le schéma de la figure 230 pour l'équation $\alpha_7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$

le champ des centres sera construit avec un module m, celui des intersections avec un module $2m$. Le tracé de la famille de droites α est superflu.

Exemple 67. Traçons un tel abaque pour l'équation

$$\alpha_7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \qquad (9.35)$$

dans les limites $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1$; $0 \leqslant \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \leqslant 2$, $0 \leqslant \alpha_7 \leqslant 6$ (les limites de variation de α_7 sont incomplètes).

Réduisons l'équation (9.35) à la forme canonique (9.25) de la façon suivante:

$$(-\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_7 = (\alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_5 + \alpha_6).$$

D'où il vient

$$f_{12} = -\alpha_1 - \alpha_2, \quad f_{17} = \alpha_7, \quad f_{34} = \alpha_3 + \alpha_4, \quad f_{56} = \alpha_5 + \alpha_6.$$

Posons $m = 5$ mm, $a_0 = a = 40$ mm, $a'_0 = 85$ mm, $T_{34} = 35 + 5(-\alpha_3 + \alpha_4)$, $T_1 = 15\alpha_1$, $R_1 = -0{,}5\alpha_1$, $T_{56} = 40 + 5(\alpha_5 - \alpha_6)$. L'abaque représentatif des équations (9.30) à (9.34) est tracé sur la figure 231 pour les valeurs choisies des paramètres et des fonctions arbitraires. On a supprimé la famille de droites verticales attribuées à la variable auxiliaire α. Les arcs de cercles en pointillé figurent la solution de l'exemple numérique: $\alpha_1 = 0{,}8$, $\alpha_2 = 0{,}2$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 0{,}5$, $\alpha_6 = 1{,}5$; réponse $\alpha_7 = 5$.

CHAPITRE 10

MÉTHODE DE CONSTRUCTION DES ABAQUES AU COMPAS ADAPTÉS

§ 10.1 Déduction de la forme canonique représentable par un abaque au compas adapté

Au § 8.6, on a montré que l'abaque au compas adapté de la figure 210 était représentatif d'une équation à six variables de la forme

$$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}. \tag{10.1}$$

La relation (10.1) sera dite *forme canonique représentable par un abaque au compas adapté.*

Déduisons maintenant la forme (10.1) par un autre procédé qui donne les équations des éléments de l'abaque. Supposons qu'un tel

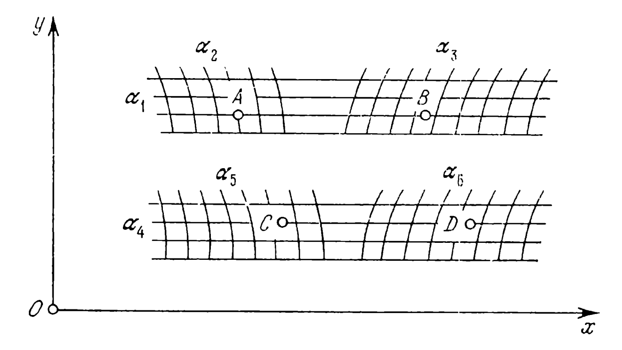


Fig. 232. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$.

abaque a déjà été construit (fig. 232). Disposons le système de coordonnées xOy de telle sorte que l'axe Ox soit parallèle aux droites α_1 et α_4. Soient A, B, C et D des points des champs binaires dont les cotes vérifient l'équation (10.1). En vertu de la clef on a $AB = CD$. Par ailleurs $AB \parallel CD \parallel Ox$. Soient x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D les coordonnées respectives des points A, B, C et D. Les conditions $AB = CD$ et $AB \parallel CD \parallel Ox$ se traduisent par les relations suivantes

entre les coordonnées des points A, B, C et D:

$$x_B - x_A = x_D - x_C, \quad y_A = y_B, \quad y_C = y_D.$$

En posant

$$x_A = f_{12}, \quad x_B = -f_{13}, \quad x_C = f_{45}, \quad x_D = -f_{46}$$

dans la première relation, on obtient la forme canonique (10.1). Posons les ordonnées y_A et y_B égales à une fonction arbitraire $T_1(\alpha_1)$, et les ordonnées y_C et y_D à une fonction $T_4(\alpha_4)$. Les équations des éléments de l'abaque représentatif de la relation (10.1) s'écrivent (les indices des coordonnées ont été omis):

champ (α_1, α_2):

$$x = f_{12}, \quad y = T_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = -f_{13}, \quad y = T_1;$$

champ (α_4, α_5):

$$x = f_{45}, \quad y = T_4;$$

champ (α_4, α_6):

$$x = -f_{46}, \quad y = T_4.$$

§ 10.2. Méthode de construction d'un abaque au compas adapté pour la forme canonique $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$

Introduisons dans les équations des éléments de l'abaque les paramètres auxiliaires de transformation a_0, a, a' et m et deux fonctions arbitraires R_1 et R_4. Transformons identiquement l'équation (10.1)

$$[a_0 + m(f_{12} + R_1)] + [-a_0 - a + m(f_{13} - R_1)] = [a_0 + a' + m(f_{45} + R_4)] + [-a_0 - a' - a + m(f_{46} - R_4)].$$

La nouvelle équation est de la même forme que l'équation initiale, i.e.

$$\bar{f}_{12} + \bar{f}_{13} = \bar{f}_{45} + \bar{f}_{46}.$$

Dans cette équation les nouvelles fonctions $\bar{f}_{12}$, $\bar{f}_{13}$, $\bar{f}_{45}$ et $\bar{f}_{46}$ dépendent des paramètres et des fonctions arbitraires:

$$\bar{f}_{12} = a_0 + m(f_{12} + R_1), \quad f_{13} = -[a_0 + a + m(-f_{13} + R_1)],$$

$$\bar{f}_{45} = a_0 + a' + m(f_{45} + R_4), \quad \bar{f}_{46} = -[a_0 + a' + a + m(-f_{46} + R_4)].$$

Les nouvelles équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m(f_{12} + R_1), \quad y = T_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m(-f_{13} + R_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_4, α_5):

$$x = a_0 + a' + m(f_{45} + R_4), \qquad y = T_4;$$

champ (α_4, α_6):

$$x = a_0 + a' + a + m(-f_{46} + R_4), \qquad y = T_4.$$

La projection d'un abaque au compas implique le choix des quatre paramètres a_0, a', a et m et des quatre fonctions arbitraires T_1, R_1, T_4 et R_4. Le paramètre a_0 positionne l'origine des coordonnées. Les paramètres a et a' permettent de déplacer les familles de lignes α_3 et α_5 dans le sens de l'axe des abscisses Ox. Une fois les paramètres a_0, a et a' retenus, on met en place la famille de lignes inconnue α_6. Les variations du paramètre m se traduisent par une contraction ou une dilatation des familles de lignes α_2, α_3, α_5 et α_6 dans le sens de l'axe Ox.

Les fonctions arbitraires T_1 et T_4 décrivent les lois de distribution des droites parallèles α_1 et α_4. Dans le plus simple des cas on peut prendre des familles de droites α_1 et α_4 parallèles équidistantes. Les fonctions T_1 et T_4 s'écrivent alors

$$T_1 = b_0 + b + n\alpha_1, \quad T_4 = b_0 + p\alpha_4,$$

où b_0, b, n et p sont des paramètres.

Par un choix convenable des fonctions R_1 et R_4 on peut attribuer aux familles de lignes α_2, α_3, α_5 et α_6 une forme plus commode à l'usage. Dans le cas le plus simple on peut poser $R_1 = 0$ et $R_4 = 0$ ou $R_1 = \delta' T_1$ et $R_4 = \delta'' T_4$, où δ' et δ'' sont des paramètres.

Considérons les formes canoniques suivantes qui sont des cas particuliers de la relation (10.1):

a) forme à trois variables:

$$f_{12} = f_3, \tag{10.2}$$

$$f_1 = f_2 + f_3, \tag{10.3}$$

b) forme à quatre variables:

$$f_{12} = f_{34}, \tag{10.4}$$

$$f_{12} + f_{13} = f_4, \tag{10.5}$$

$$f_{12} = f_3 + f_4, \tag{10.6}$$

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4, \tag{10.7}$$

c) forme à cinq variables:

$$f_{12} = f_{34} + f_{35}, \qquad (10.8)$$

$$f_{12} + f_{13} = f_4 + f_5, \qquad (10.9)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = f_4 + f_5, \qquad (10.10)$$

d) forme à six variables:

$$f_{12} + f_3 = f_{45} + f_6, \qquad (10.11)$$

$$f_{12} + f_3 = f_4 + f_5 + f_6, \qquad (10.12)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = f_4 + f_5 + f_6. \qquad (10.13)$$

Pour déduire les équations des éléments des abaques représentatifs des formes (10.2) à (10.13), il faut réduire ces formes à la forme (10.1) et déterminer les fonctions qui y figurent. Pour distinguer les fonctions de la forme (10.1) de celles des formes (10.2) à (10.13), on les coiffera dans la suite d'une barre: $\bar{f}_{12}$, $\bar{f}_{13}$, $\bar{f}_{45}$ et $\bar{f}_{46}$.

§ 10.3. Abaques au compas adaptés pour formes canoniques à trois variables

Abaque représentatif de la forme $f_{12} = f_3$. Mettons (10.2) sous la forme

$$0 + \Phi(f_{12}) = 0 + \Phi(f_3), \qquad (10.14)$$

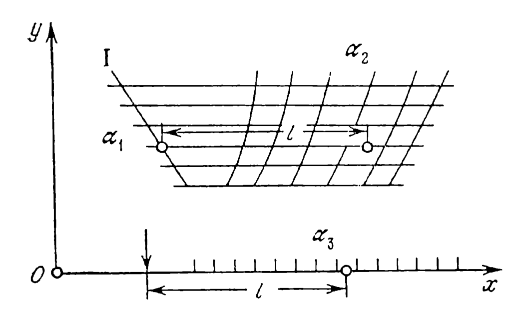


Fig. 233. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_{12} = f_3$

où Φ est une fonction quelconque. Une comparaison de (10.14) et de la forme (10.1) donne

$$\bar{f}_{12} = 0, \quad \bar{f}_{13} = \Phi(f_{12}), \quad \bar{f}_{45} = 0, \quad \bar{f}_{46} = \Phi(f_3).$$

Les équations des éléments de l'abaque (cf. fig. 233) s'écrivent:

ligne I (échelle α_1):

$$x = a_0 + mR_1, \quad y = T_1;$$

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + a + m[-\Phi(f_{12}) + R_1], \qquad y = T_1;$$

point fixe (la flèche verticale):

$$x = a_0 + a', \quad y = 0;$$

échelle α_3:

$$x = a_0 + a' + a - m\Phi(f_3), \quad y = 0.$$

Représentation de la forme $f_1 = f_2 + f_3$. Ramenons la forme (10.3) à la forme (10.1) $f_1 - f_2 = 0 + f_3$.

D'où il vient

$$\bar{f}_{12} = f_1, \quad \bar{f}_{13} = -f_2, \quad \bar{f}_{45} = 0, \quad \bar{f}_{46} = f_3.$$

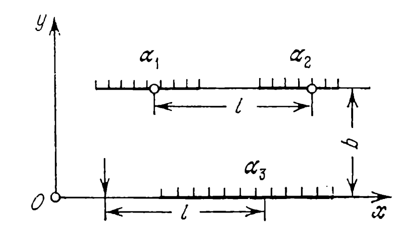


Fig. 234. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_1 = f_2 + f_3$

Les équations des éléments de l'abaque (cf. fig. 234) s'écrivent:

échelle α_1:

$$x = a_0 + mf_1, \quad y = b;$$

échelle α_2:

$$x = a_0 + a + mf_2, \quad y = b;$$

point fixe (la flèche verticale):

$$x = a_0 + a', \quad y = 0;$$

échelle α_3:

$$x = a_0 + a' + a - mf_3, \quad y = 0.$$

Exemple 68. Tracer un abaque au compas représentatif de la forme (2.7), où $150 \leqslant T \leqslant 190$ cm, $20 \leqslant A \leqslant 80$ ans, $50 \leqslant P \leqslant 95$ kg.

Ramenons la formule (2.7) à la forme (10.3)

$$-0{,}25\,(A - 20) = 0{,}75\,(T - 150) - (P - 50).$$

Posons

$$f_1 = -0{,}25\,(A - 20), \quad f_2 = 0{,}75\,(T - 150), \quad f_3 = -(P - 50).$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle A:

$$x = a_0 - 0{,}25m\,(A - 20), \quad y = b;$$

échelle T:

$$x = a_0 + a + 0{,}75m\,(T - 150), \quad y = b;$$

point fixe (la flèche verticale):

$$x = a_0 + a', \quad y = 0;$$

échelle P:

$$x = a_0 + a' + a + m\,(P - 50), \quad y = 0.$$

L'abaque représentatif de ces équations pour les valeurs $m = 2$ mm, $a_0 = 30$ mm, $b = 30$ mm, $a = 20$ mm, $a' = -30$ mm est repré-

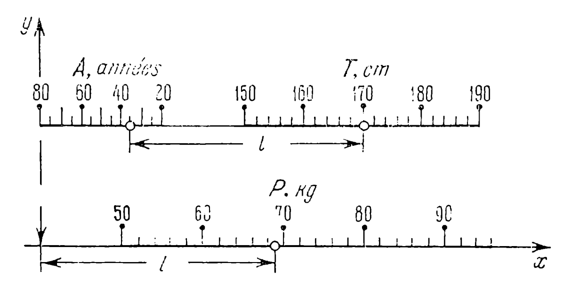


Fig. 235. Abaque construit d'après le schéma de la figure 234 pour la formule (2.7)

senté sur la figure 235. Il donne la solution de l'exemple numérique: $A = 35$ ans, $T = 170$ cm; réponse: $P = 69$ kg.

§ 10.4. Abaques au compas adaptés pour formes canoniques à quatre variables

Représentation de la forme $f_{12} = f_{34}$. Mettons (10.4) sous la forme

$$0 + \Phi\,(f_{12}) = 0 + \Phi\,(f_{34}), \qquad (10.15)$$

où Φ est une fonction arbitraire. La comparaison de l'équation (10.15) et de la forme (10.1) donne $\bar{f}_{12} = 0$, $\bar{f}_{13} = \Phi\,(f_{12})$, $\bar{f}_{45} = 0$, $\bar{f}_{46} = \Phi\,(f_{34})$. Les équations des éléments de l'abaque (cf. fig. 236) s'écrivent:

ligne I (échelle α_1):

$$x = a_0 + mR_1, \quad y = T_1;$$

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + a + m\,[-\Phi\,(f_{12}) + R_1], \qquad y = T_1;$$

ligne II (échelle α_3):

$$x = a_0 + a' + mR_3, \qquad y = T_3;$$

champ (α_3, α_4):

$$x = a_0 + a' + a + m\,[-\Phi\,(f_{34}) + R_3], \qquad y = T_3.$$

Représentation de la forme $f_{12} + f_{13} = f_4$. Mettons (10.5) sous la forme $f_{12} + f_{13} = 0 + f_4$ et comparons avec (10.1).

Il vient $\overline{f}_{12} = f_{12}$, $\overline{f}_{13} = f_{13}$, $\overline{f}_{45} = 0$, $\overline{f}_{46} = f_4$.

Fig. 236. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_{12} = f_{34}$

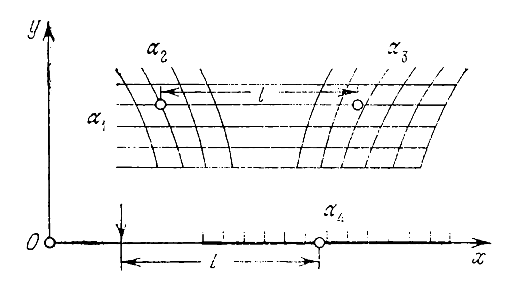


Fig. 237. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_{12} + f_{13} = f_4$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent (cf. fig. 237):

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m\,(f_{12} + R_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m\,(-f_{13} + R_1), \qquad y = T_1;$$

point fixe:

$$x = a_0 + a', \qquad y = 0;$$

échelle α_4:

$$x = a_0 + a' + a - mf_4, \qquad y = 0.$$

La relation (10.5) est susceptible d'être représentée par un abaque à points équidistants avec une échelle des centres α_4 et des champs des intersections (α_1, α_2) et (α_1, α_3). Seules α_2 ou α_3 peuvent être inconnues contrairement à un abaque au compas où toute variable peut l'être.

Représentation de la forme $f_{12} = f_3 + f_4$. Mettons (10.6) sous la forme

$$0 + f_{12} = f_3 + f_4.$$

Une comparaison avec (10.1) donne

$$\bar{f}_{12} = 0, \quad \bar{f}_{13} = f_{12}, \quad \bar{f}_{45} = f_3, \quad \bar{f}_{46} = f_4.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

ligne I (échelle α_1):

$$x = a_0 + mR_1, \quad y = T_1;$$

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + a + m(-f_{12} + R_1), \quad y = T_1;$$

échelle α_3:

$$x = a_0 + a' + mf_3, \quad y = 0;$$

échelle α_4:

$$x = a_0 + a' + a - mf_4, \; y = 0.$$

L'abaque est représenté sur la figure 238.

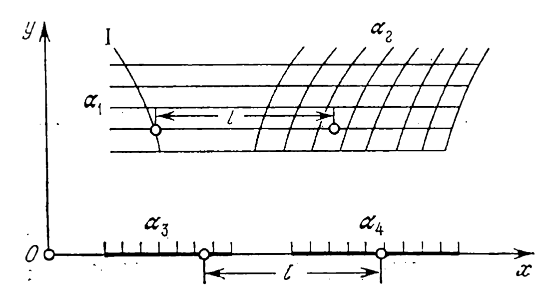


Fig. 238. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_{12} = f_3 + f_4$

On remarquera que la forme (10.6) est susceptible d'être également représentée par un abaque à points équidistants à champ des centres (α_1, α_2) et à échelles des intersections α_3 et α_4. Les variables inconnues sont ici α_3 ou α_4.

Représentation de la forme $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$. Une comparaison de la forme (10.7) avec (10.1) donne

$$\bar{f}_{12} = f_1, \quad \bar{f}_{13} = f_2, \quad \bar{f}_{45} = f_3, \quad \bar{f}_{46} = f_4.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle α_1:

$$x = a_0 + mf_1, \quad y = b;$$

échelle α_2:

$$x = a_0 + a - mf_2, \quad y = b;$$

échelle α_3:

$$x = a_0 + a' + mf_3, \quad y = 0;$$

échelle α_4:

$$x = a_0 + a' + a - mf_4, \quad y = 0.$$

L'abaque est dessiné sur la figure 239.

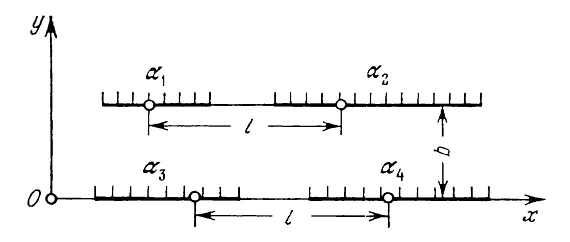


Fig. 239. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$

Exemple 69. Traçons un abaque de ce type pour l'équation (9.10) sur les intervalles $0{,}1 \leqslant u_1,\ u_2,\ u_3 \leqslant 10,\ 0{,}1 \leqslant v \leqslant 10$.

En prenant le logarithme de l'équation (9.10) on la ramène à la forme (10.7):

$$-0{,}6 \log u_1 - 0{,}9 \log u_3 = 0{,}3 \log u_2 - (\log v - \log 2{,}5).$$

Posons

$$f_1 = -0{,}6 \log u_1, \quad f_2 = -0{,}9 \log u_3, \quad f_3 = 0{,}3 \log u_2,$$
$$f_4 = -(\log v - \log 2{,}5).$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
échelle u_1:

$$x = a_0 - 0{,}6m \log u_1, \quad y = b;$$

échelle u_3:

$$x = a_0 + a + 0{,}9m \log u_3, \quad y = b;$$

échelle u_2:

$$x = a_0 + a' + 0{,}3m \log u_2, \quad y = 0;$$

échelle v:

$$x = a_0 + a' + a + m (\log v - \log 2{,}5), \quad y = 0.$$

L'abaque représentatif pour les valeurs $m = 50$ mm, $b = 35$ mm, $a_0 = 30$ mm, $a = 105$ mm, $a' = -5$ mm, est tracé sur la figure 240.

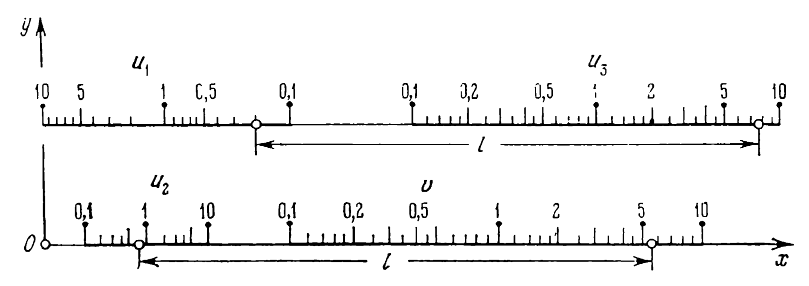


Fig. 240. Abaque construit d'après le schéma de la figure 239 pour la formule $v = 2{,}5u_1^{0,6}u_2^{0,3}u_3^{0,9}$

Il propose la solution de l'exemple numérique : $u_1 = 0{,}2$, $u_2 = 0{,}7$, $u_3 = 7{,}7$; réponse $v = 5{,}4$.

§ 10.5. Abaques au compas adaptés pour formes canoniques à cinq variables

Représentation de la forme $f_{12} = f_{34} + f_{35}$. Mettons (10.8) sous la forme

$$0 + f_{12} = f_{34} + f_{35}$$

et comparons avec (10.1). Il vient

$$\bar{f}_{12} = 0, \quad \bar{f}_{13} = f_{12}, \quad \bar{f}_{45} = f_{34}, \quad \bar{f}_{46} = f_{35}.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent :

ligne I (échelle α_1) :

$$x = a_0 + mR_1, \quad y = T_1;$$

champ (α_1, α_2) :

$$x = a_0 + a + m(-f_{12} + R_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_3, α_4) :

$$x = a_0 + a' + m\,(f_{34} + R_3), \qquad y = T_3;$$

champ (α_3, α_5) :

$$x = a_0 + a' + a + m\,(-f_{35} + R_3), \qquad y = T_3.$$

L'abaque est tracé sur la figure 241.

Il a l'avantage d'être à résolution totale, i.e. de permettre le calcul d'une variable quelconque pour des valeurs données des autres. Ainsi on peut déterminer la valeur de α_3 qui correspond aux valeurs

données des autres variables. Dans un abaque à points équidistants ce problème se résout par tâtonnement.

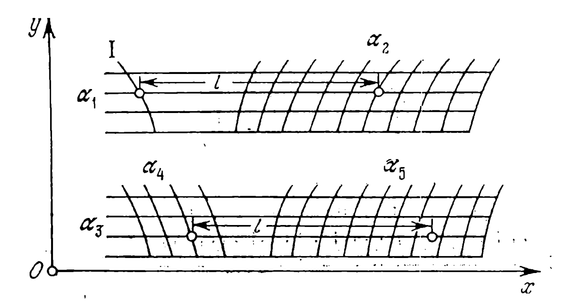


Fig. 241. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_{12} = f_{34} + f_{35}$

Représentation de la forme $f_{12} + f_{13} = f_4 + f_5$. Ramenons (10.9) à (10.1) en posant

$$\bar{f}_{12} = f_{12}, \quad \bar{f}_{13} = f_{13}, \quad \bar{f}_{45} = f_4, \quad \bar{f}_{46} = f_5.$$

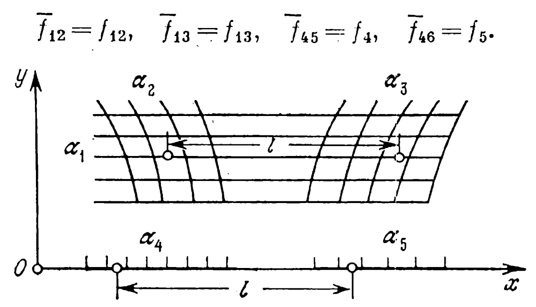


Fig. 242. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_{12} + f_{13} = f_4 + f_5$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m(f_{12} + R_1), \quad y = T_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m(-f_{13} + R_1), \quad y = T_1;$$

échelle α_4:

$$x = a_0 + a' + mf_4, \quad y = 0;$$

échelle α_5:

$$x = a_0 + a' + a - mf_5, \quad y = 0.$$

L'abaque est tracé sur la figure 242.

A signaler que l'équation (10.9) est représentable par un abaque à points équidistants à champ des centres (α_4, α_5) et à champs des intersections (α_1, α_2) et (α_1, α_3). Mais seules α_2 et α_3 peuvent être inconnues.

Représentation de la forme $f_1 + f_2 + f_3 = f_4 + f_5$. Ramenons la forme (10.10) à la forme (10.1) en posant

$$\overline{f}_{12} = f_1 + f_2, \quad \overline{f}_{13} = f_3, \quad \overline{f}_{45} = f_4, \quad \overline{f}_{46} = f_5.$$

Les équations des éléments de l'abaque sont:
champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m(f_1 + f_2 + R_1), \quad y = T_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m(-f_3 + R_1), \quad y = T_1;$$

échelle α_4:

$$x = a_0 + a' + mf_4, \quad y = 0;$$

échelle α_5:

$$x = a_0 + a' + a - mf_5, \quad y = 0.$$

L'abaque est encore celui de la figure 242.

Par un choix judicieux des fonctions R_1 et T_1, on peut toujours transformer les familles de lignes α_2 et α_3 en familles de droites parallèles. Il suffit de poser

$$T_1 = b + nf_1, \quad R_1 = \delta f_1,$$

où b, n et δ nt des paramètres. On obtient les équations suivantes des champs binaires qui mettent en jeu ces familles:
champ (α_1, α):

$$x = a_0 + m(f_1 + f_2 + \delta f_1), \quad y = b + nf_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m(-f_3 + \delta f_1), \quad y = b + nf_1.$$

En éliminant la fonction f_1 entre les équations du champ binaire (α_1, α_2), on obtient l'équation de la famille de droites parallèles α_2:

$$x = \frac{m(1+\delta)}{n} y + mf_2 + a_0 - \frac{mb(1+\delta)}{n}.$$

De façon analogue, en éliminant la fonction f_1 entre les équations du champ binaire (α_1, α_3), on déduit l'équation de la famille de droites parallèles α_3:

$$x = \frac{m\delta}{n} y - mf_3 + a_0 + a - \frac{mb\delta}{n}.$$

Le paramètre δ peut être choisi tel que les familles de droites parallèles α_2 et α_3 coupent les familles de droites horizontales α_1 sous des angles qui soient les plus proches d'un angle droit. Il en

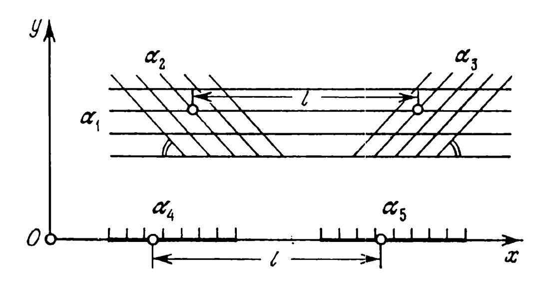


Fig. 243. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_1 + f_2 + f_3 = f_4 + f_5$

sera ainsi lorsque ces angles, et partant, leurs tangentes seront numériquement égales mais de signes contraires. Ceci se traduit par

$$\frac{n}{m(1+\delta)} = -\frac{n}{m\delta}.$$

D'où il vient $\delta = -0,5$. L'abaque correspondant est celui de la figure 243. Les équations de ses éléments s'écrivent:

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m(0,5f_1 + f_2), \qquad y = b + nf_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m(-0,5f_1 - f_3), \quad y = b + nf_1;$$

échelle α_4:

$$x = a_0 + a' + mf_4, \qquad y = 0;$$

échelle α_5:

$$x = a_0 + a' + a - mf_5, \qquad y = 0.$$

§ 10.6. Abaques au compas adaptés pour formes canoniques à six variables

Représentation de la forme $f_{12} + f_3 = f_{45} + f_6$. Ramenons la forme (10.11) à la forme (10.1) en posant

$$\bar{f}_{12} = f_{12}, \quad \bar{f}_{13} = f_3, \quad \bar{f}_{45} = f_{45}, \quad \bar{f}_{46} = f_6.$$

Attribuons les variables α_1 et α_4 à des familles de droites horizontales. Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent alors:

champ (α_1, α_2):
$$x = a_0 + m(f_{12} + R_1), \quad y = T_1;$$
champ (α_1, α_3):
$$x = a_0 + a + m(-f_3 + R_1), \quad y = T_1;$$
champ (α_4, α_5):
$$x = a_0 + a' + m(f_{45} + R_4), \quad y = T_4;$$
champ (α_4, α_6):
$$x = a_0 + a' + a + m(-f_6 + R_4), \quad y = T_4.$$
L'abaque est dessiné sur la figure 232.

Si l'on pose
$$R_1 = \delta' T_1 \text{ et } R_4 = \delta'' T_4,$$
où δ' et δ'' sont des paramètres, les familles de lignes α_3 et α_6 se transforment en des familles distinctes de droites parallèles.

Représentation de la forme $f_{12} + f_3 = f_4 + f_5 + f_6$. Ramenons la forme (10.12) à la forme (10.1) en posant
$$\overline{f}_{12} = f_{12}, \quad \overline{f}_{13} = f_3, \quad \overline{f}_{45} = f_4 + f_5, \quad \overline{f}_{46} = f_6.$$
Dans le cas où les variables α_1 et α_4 sont attribuées à des familles de droites horizontales, les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

champ (α_1, α_2):
$$x = a_0 + m(f_{12} + R_1), \quad y = T_1;$$
champ (α_1, α_3):
$$x = a_0 + a + m(-f_3 + R_1), \quad y = T_1;$$
champ (α_4, α_5):
$$x = a_0 + a' + m(f_4 + f_5 + R_4), \quad y = T_4;$$
champ (α_4, α_6):
$$x = a_0 + a' + a + m(-f_6 + R_4), \quad y = T_4.$$
En posant
$$R_1 = \delta f_1, \qquad T_1 = b_0 + b + n f_1,$$
$$R_4 = -0{,}5 f_4, \quad T_4 = b_0 + p f_4,$$
où δ, b_0, b, n et p sont des paramètres de transformation, les familles de lignes α_3, α_5, α_6 se transformeront en des familles distinctes de droites parallèles, telles que les pentes des droites α_5 et α_6 seront égales et de signes opposés. Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m\,(f_{12} + \delta f_1), \quad y = b_0 + b + nf_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m\,(-f_3 + \delta f_1), \quad y = b_0 + b + nf_1;$$

champ (α_4, α_5):

$$x = a_0 + a' + m\,(0{,}5f_4 + f_5), \quad y = b_0 + pf_4;$$

champ (α_4, α_6):

$$x = a_0 + a' + a + m\,(-f_6 - 0{,}5f_4), \quad y = b_0 + pf_4.$$

L'abaque est dessiné sur la figure 244.

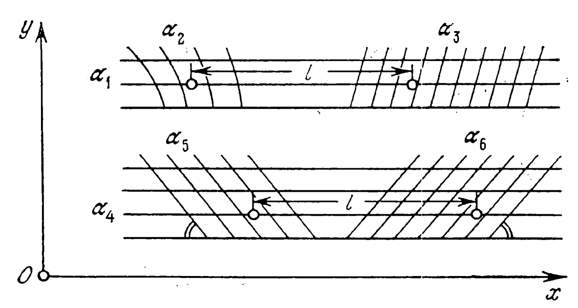


Fig. 244. Schéma d'un abaque adapté au compas pour la forme $f_{12} + f_3 = f_4 + f_5 + f_6$

Représentation de la forme $f_1 + f_2 + f_3 = f_4 + f_5 + f_6$. Ramenons la forme (10.13) à la forme (10.1) en posant

$$\bar{f}_{12} = f_1 + f_2, \quad \bar{f}_{13} = f_3, \quad \bar{f}_{45} = f_4 + f_5, \quad \bar{f}_{46} = f_6.$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent dans le cas où les variables α_1 et α_4 sont représentées par des familles de droites horizontales:

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m\,(f_1 + f_2 + R_1), \quad y = T_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m\,(-f_3 + R_1), \quad y = T_1;$$

champ (α_4, α_5):

$$x = a_0 + a' + m\,(f_4 + f_5 + R_4), \quad y = T_4;$$

champ (α_4, α_6):

$$x = a_0 + a' + a + m\,(-f_6 + R_4), \quad y = T_4.$$

L'abaque est celui de la figure 232.

Si, comme plus haut, l'on pose

$$R_1 = -0{,}5f_1,\quad T_1 = b_0 + b + nf_1,$$
$$R_4 = -0{,}5f_4,\quad T_4 = b_0 + pf_4,$$

où b_0, b, n et p sont des paramètres, les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m\,(0{,}5f_1 + f_2),\qquad y = b_0 + b + nf_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m\,(-f_3 - 0{,}5f_1),\qquad y = b_0 + b + nf_1;$$

champ (α_4, α_5):

$$x = a + a' + m\,(0{,}5f_4 + f_5),\qquad y = b_0 + pf_4;$$

champ (α_4, α_6):

$$x = a_0 + a' + a + m\,(-f_6 - 0{,}5f_4),\ y = b_0 + pf_4.$$

Cet abaque n'est constitué que de familles de droites parallèles

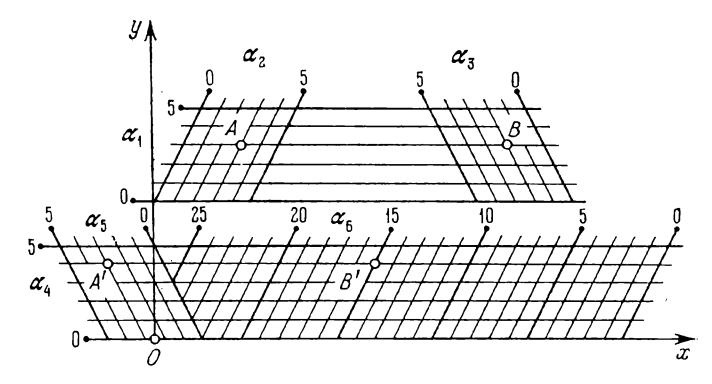


Fig. 245. Abaque adapté au compas pour la détermination de α_6 par la formule $\alpha_6 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$

telles que les pentes des droites α_2 et α_3 sont égales et de signes contraires de même que les pentes des droites α_5 et α_6.

Exemple 70. Représentons la formule

$$\alpha_6 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \tag{10.16}$$

par un abaque de ce type sur les intervalles $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \leqslant 5$, $0 \leqslant \alpha_6 \leqslant 25$.

Ramenons la forme (10.16) à la forme (10.13)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6,$$

en posant

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad f_3 = \alpha_3,$$
$$f_4 = -\alpha_4, \quad f_5 = -\alpha_5, \quad f_6 = \alpha_6.$$

L'abaque représentatif pour $a_0 = 0$, $a' = 0$, $a = 110$ mm, $m = 5$ mm, $b_0 = 0$, $b = 37$ mm, $n = 5$ mm, $p = -5$ mm est dessiné sur la figure 245. Les points A, B, A' et B' correspondent à la solution de l'exemple numérique: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 4$, $\alpha_5 = 3$; réponse $\alpha_6 = 15$.

§ 10.7. Abaques au compas adaptés pour systèmes d'équations

Les abaques au compas se prêtent bien à la résolution du système d'équations

$$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46} = \ldots = f_{n-5,\ n-4} + f_{n-5,\ n-3} = \\ = f_{n-2,\ n-1} + f_{n-2,\ n}. \qquad (10.17)$$

Signalons un cas particulier spécial de ce système

$$f_{12} + f_3 = f_{14} + f_5 = \ldots = f_{1,\ n-1} + f_n. \qquad (10.18)$$

Considérons la représentation nomographique du cas particulier du système (10.17)

$$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46} = f_{78} + f_{79} \qquad (10.19)$$

et du cas particulier du système (10.18)

$$f_{12} + f_3 = f_{14} + f_5 = f_{16} + f_7. \qquad (10.20)$$

Représentation du système (10.19). Mettons-le sous la forme

$$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}, \qquad f_{12} + f_{13} = f_{78} + f_{79}.$$

Ces équations sont susceptibles d'être représentées par des abaques au compas dans lesquels les champs (α_1, α_2) et (α_1, α_3) peuvent toujours être identifiés, puisque les premiers membres sont les mêmes. Ces abaques peuvent donc être superposés de telle sorte que leurs champs identiques viennent en coïncidence. On obtiendrait alors l'abaque de la figure 246. Si l'on désigne par A, B, A', B', A'' et B'' des points des champs binaires, dont les cotes vérifient le système d'équations (10.19), alors le mode d'emploi de l'abaque découlera des égalités

$$AB = A'B' = A''B'' = l.$$

Ce qu'il y a de remarquable dans cet abaque c'est qu'en résolvant le système d'équations qu'il représente on définit une fois pour toutes

l'écartement du compas à l'aide, par exemple, du premier groupe de champs binaires (α_1, α_2) et (α_1, α_3). En outre, dans chacun des

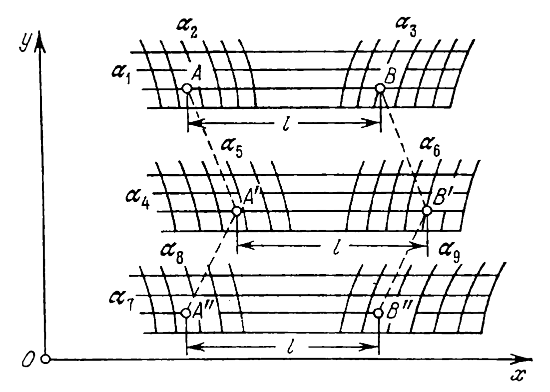


Fig. 246. Schéma d'un abaque adapté au compas pour le système d'équations $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46} = f_{78} + f_{79}$

deux groupes de champs restants, on peut déterminer n'importe quelle variable.

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m\,(f_{12} + R_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m\,(-f_{13} + R_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_4, α_5):

$$x = a_0 + a' + m\,(f_{45} + R_4), \qquad y = T_4;$$

champ (α_4, α_6):

$$x = a_0 + a' + a + m\,(-f_{46} + R_4), \qquad y = T_4;$$

champ (α_7, α_8):

$$x = a_0 + a'' + m\,(f_{78} + R_7), \qquad y = T_7;$$

champ (α_7, α_9):

$$x = a_0 + a'' + a + m\,(-f_{79} + R_7), \qquad y = T_7.$$

Représentation du système d'équations (10.20). L'abaque représentatif du système d'équations (10.20) est celui de la figure 247. Il a ceci de particulier que les familles de lignes horizontales α_1 sont impliquées dans tous les champs binaires. Soient A, B, A', B', A'' et B'' des points des champs binaires, dont les cotes vérifient

le système (10.20). La clef de l'abaque découlera alors des égalités

$$AB = A'B' = A''B'' = l.$$

Ces égalités entraînent

$$AA' = BB', \quad AA'' = BB'', \quad A'A'' = B'B''.$$

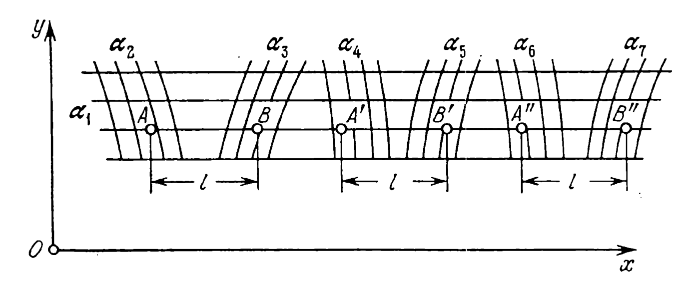


Fig. 247. Schéma d'un abaque adapté au compas pour le système d'équations $f_{12} + f_3 = f_{14} + f_5 = f_{16} + f_7$

Les équations des éléments de l'abaque sont consignées dans le tableau 33.

Tableau 33

Coordonnées	Champ (α_1, α_2)	champ (α_1, α_3)	champ (α_1, α_4)	champ (α_1, α_5)	champ (α_1, α_6)	champ (α_1, α_7)
x	f_{12}	$-f_3$	f_{14}	$-f_5$	f_{16}	$-f_7$
y	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1	T_1

Transformons identiquement le système d'équations (10.20) en y introduisant les paramètres de transformation a_0, a, a', a'', m et les fonctions arbitraires P_1, Q_1, R_1, S_1:

$$[a_0 + m\,(f_{12} + P_1 + Q_1)] + [-a_0 - a + m\,(f_3 - Q_1)] =$$
$$= [a_0 + a' + m\,(f_{14} + P_1 + R_1)] + [-a_0 - a' - a + m\,(f_5 - R_1)] =$$
$$= [a_0 + a'' + m\,(f_{16} + P_1 + S_1)] + [-a_0 - a'' - a + m\,(f_7 - S_1)].$$

Les nouvelles équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m\,(f_{12} + P_1 + Q_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a + m\,(-f_3 + Q_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_1, α_4):

$$x = a_0 + a' + m\,(f_{14} + P_1 + R_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_1, α_5):

$$x = a_0 + a' + a + m\,(-f_5 + R_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_1, α_6):

$$x = a_0 + a'' + m\,(f_{16} + P_1 + S_1), \qquad y = T_1;$$

champ (α_1, α_7):

$$x = a_0 + a'' + a + m\,(-f_7 + S_1), \qquad y = T_1.$$

Pour construire l'abaque il faut choisir les paramètres de transformation et les cinq fonctions arbitraires P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1. Si l'on pose $Q_1 = R_1 = S_1 = 0$, les familles de lignes α_3, α_5 et α_7 seront des familles de droites verticales.

§ 10.8. Abaques au compas adaptés composés

Un *abaque au compas composé* est susceptible de représenter une équation de la forme

$$f_{12} + f_{13} + f_{45} + f_{46} + \ldots + f_{n-5,\, n-4} + f_{n-5,\, n-3} = \\ = f_{n-2,\, n-1} + f_{n-2,\, n}. \qquad (10.21)$$

Considérons l'abaque représentatif du cas particulier de l'équation (10.21), où les variables sont au nombre de neuf

$$f_{12} + f_{13} + f_{45} + f_{46} = f_{78} + f_{79}. \qquad (10.22)$$

Dissocions cette équation par l'intermédiaire de la variable auxiliaire α:

$$f_{12} + f_{13} + f_{45} = \alpha, \qquad \alpha + f_{46} = f_{78} + f_{79}.$$

Mises sous la forme

$$f_{12} + f_{13} = -f_{45} + \alpha, \qquad -\alpha - f_{46} = -f_{78} - f_{79}$$

ces équations sont représentables par deux abaques au compas ayant en commun le champ binaire (α_4, α), i.e. un abaque au compas composé. Celui-ci est représenté sur la figure 248. Les équations de ses éléments s'écrivent:

champ (α_1, α_2):

$$x = a_0 + m\,(f_{12} + R_1), \qquad y = T_1; \qquad (10.23)$$

champ (α_1, α_3):

$$x = a_0 + a^* + m\,(-f_{13} + R_1), \qquad y = T_1; \qquad (10.24)$$

champ (α_4, α_5):

$$x = a_0 + a' + m(-f_{45} + R_4), \quad y = T_4; \tag{10.25}$$

champ (α_4, α):

$$x = a_0 + a' + a^* + m(-\alpha + R_4), \quad y = T_4; \tag{10.26}$$

champ (α_4, α_6):

$$x = a_0 + a' + a^* + a^{**} + m(f_{46} + R_4), \quad y = T_4; \tag{10.27}$$

champ (α_7, α_8):

$$x = a_0 + a' + a^* + a'' + m(-f_{78} + R_7), \quad y = T_7; \tag{10.28}$$

champ (α_7, α_9):

$$x = a_0 + a' + a^* + a'' + a^{**} + m(f_{79} + R_7), \quad y = T_7. \tag{10.29}$$

C'est un abaque à résolution totale.

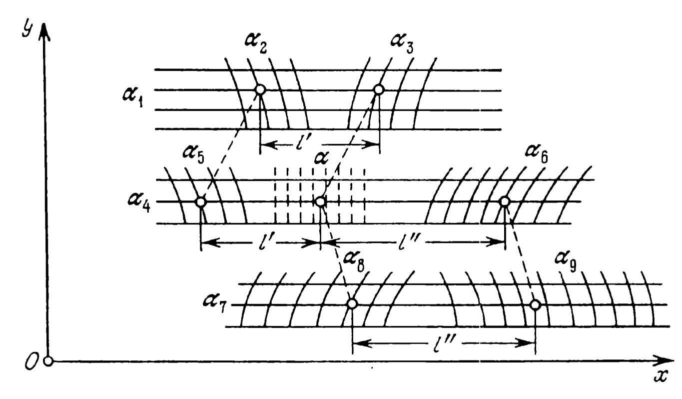


Fig. 248. Schéma d'un abaque adapté composé au compas pour l'équation $f_{12} + f_{13} + f_{45} + f_{46} = f_{78} + f_{79}$

Exemple 71. Traçons un abaque de ce type pour l'équation

$$\alpha_9 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 \tag{10.30}$$

sur les intervalles $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_4, \alpha_7 \leqslant 1$; $0 \leqslant \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8 \leqslant 2$; $0 \leqslant \alpha_9 \leqslant 13$.

Mettons l'équation (10.30) sous la forme

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = -\alpha_7 - \alpha_8 + \alpha_9$$

et ramenons-la à (10.22) en posant

$$f_{12} = \alpha_1 + \alpha_2, \quad f_{13} = \alpha_3, \quad f_{45} = \alpha_4 + \alpha_5,$$
$$f_{46} = \alpha_6, \quad f_{78} = -\alpha_7 - \alpha_8, \quad f_{79} = \alpha_9.$$

Soient α_1, α_4 et α_7 les variables qui se répètent. L'abaque est tracé sur la figure 249. Pour le construire on a adopté les valeurs suivantes des paramètres et des fonctions arbitraires dans les équations (10.23) à (10.29) : $m = 8$ mm, $a_0 = 38$ mm, $a^* = 60$ mm, $a' = -18$ mm,

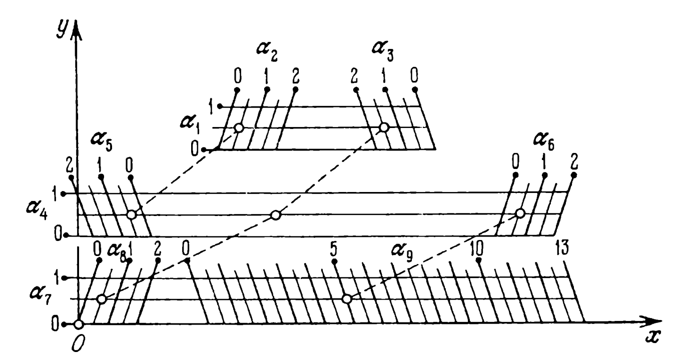


Fig. 249. Abaque tracé d'après le schéma 248 pour le calcul de α_9 par la formule $\alpha_9 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8$

$a^{**} = 35$ mm, $a'' = -80$ mm, $T_1 = 48 + 12\alpha_1$, $T_4 = 24 + 12\alpha_4$, $T_7 = 12\alpha_7$, $R_1 = -0{,}5\alpha_1$, $R_4 = 0{,}5\alpha_4$, $R_7 = -0{,}5\alpha_7$. L'abaque donne la solution de l'exemple numérique: $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}5$, $\alpha_3 = 1{,}5$, $\alpha_4 = 0{,}5$, $\alpha_5 = 0{,}5$, $\alpha_6 = 0{,}5$, $\alpha_7 = 0{,}5$, $\alpha_8 = 0{,}5$; réponse $\alpha_9 = 5$.

Dans l'abaque de la figure 249, au lieu d'un compas on peut se servir d'une bande de papier sur laquelle on aura porté des traits

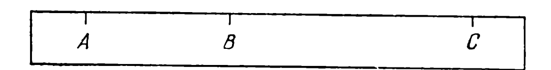


Fig. 250. Bande de papier suppléant au compas pour la lecture de l'abaque de la figure 249 (les points A, B et C correspondent à l'exemple numérique)

correspondant à la distance entre les points donnés des champs binaires. La figure 250 montre la bande de papier correspondant à l'exemple numérique cité. Le segment AB est égal à la distance entre les points donnés des champs binaires (α_1, α_2) et (α_1, α_3), le segment AC à la distance entre les points donnés des champs binaires (α_4, α_5) et (α_4, α_6). Le segment BC fait connaître la réponse α_9.

ABAQUES BARYCENTRIQUES

§ 11.1. Transformation des abaques à points alignés à échelles parallèles en un abaque barycentrique

Considérons l'abaque à points alignés à échelles parallèles représentatif de l'équation

$$v_1 + v_2 = v_3, \qquad (11.1)$$

dans lequel l'échelle v_3 est équidistante des échelles v_1 et v_2 (fig. 251).

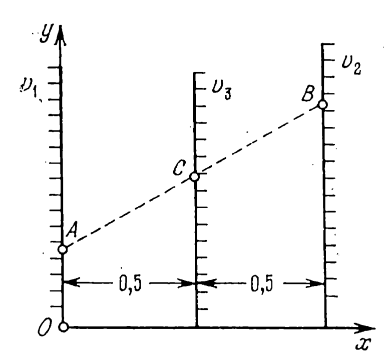


Fig. 251. Schéma d'un abaque à points alignés pour l'équation $v_1 + v_2 = v_3$ dans lequel l'échelle v_3 est comprise entre les échelles v_1 et v_2

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:

échelle v_1:

$$x = 0, \quad y = v_1;$$

échelle v_2:

$$x = 1, \quad y = v_2;$$

échelle v_3:

$$x = 0{,}5, \quad y = 0{,}5\, v_3.$$

Le mode d'emploi de l'abaque entraîne que des points A, B et C des échelles v_1, v_2 et v_3 sont alignés si leurs cotes vérifient l'équation (11.1). Par ailleurs $AC = CB$. Donc le point cherché C est situé sur un même alignement que les points A et B et au milieu du segment AB. Cette propriété permet de remplacer l'abaque à échelles de la figure 251 par un abaque constitué de trois familles de droites parallèles, menées par les points de graduation des échelles, perpendiculairement à leurs supports. Cet abaque est représenté sur la figure 252. Les équations de ses éléments s'écrivent:

famille v_1:

$$y = v_1;$$

famille v_2:

$$y = v_2;$$

famille v_3:

$$y = 0{,}5\ v_3.$$

Pour déterminer la valeur de v_3 correspondant à des valeurs données de v_1 et v_2, on considère un point arbitraire A sur la droite donnée

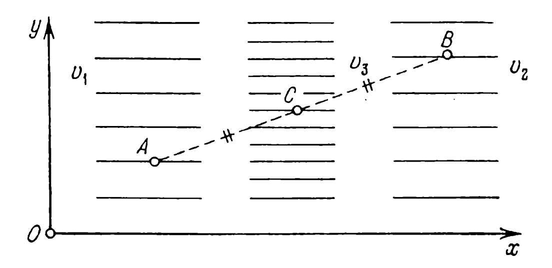


Fig. 252. Schéma d'un abaque de l'équation $v_1 + v_2 = v_3$, obtenu en remplaçant dans l'abaque de la figure 251 les échelles v_1, v_2 et v_3 par les familles de droites parallèles v_1, v_2 et v_3 perpendiculaires aux supports des échelles

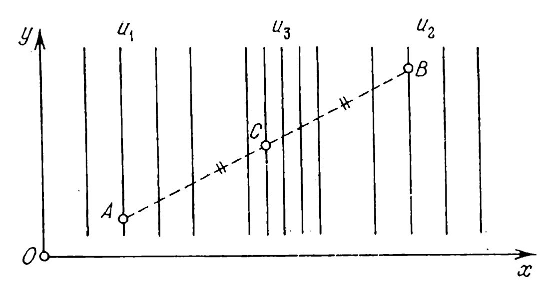


Fig. 253. Schéma d'un abaque de l'équation $u_1 + u_2 = u_3$ constitué comme l'abaque de la figure 252 de familles de verticales u_1, u_2 et u_3

v_1, un point arbitraire B sur v_2, on trace ensuite le segment de droite AB et on trouve son milieu C. La cote de la droite v_3 passant par C fait connaître v_3.

Soit maintenant à résoudre en même temps que l'équation (11.1) l'équation similaire

$$u_1 + u_2 = u_3. \qquad (11.2)$$

Représentons-la par un abaque du type de la figure 252, mais avec des familles de droites parallèles verticales u_1, u_2 et u_3 (fig. 253). Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent:
famille u_1:

$$x = u_1;$$

famille u_2:

$$x = u_2;$$

famille u_3:

$$x = 0{,}5\ u_3.$$

Les abaques des figures 252 et 253 tracés dans un même système de coordonnées xOy donnent l'abaque de la figure 254, représentatif du système d'équations (11.1) et (11.2). Pour le résoudre nous allons procéder comme suit. Le point A étant à choisir arbitrairement sur les droites données u_1 et v_1, prenons-le à leur intersection. De façon

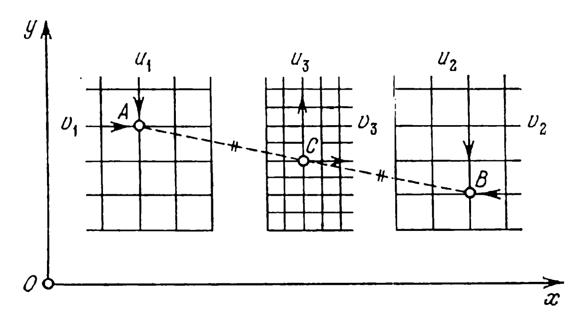


Fig. 254. Schéma de l'abaque du système d'équations $u_1 + u_2 = u_3$ et $v_1 + v_2 = v_3$, obtenu par superposition des abaques des figures 252 et 253

analogue le point B est à l'intersection des droites données u_2 et v_2. Traçons le segment AB; son milieu C fait connaître u_3 et v_3.

Supposons maintenant que u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 sont des variables auxiliaires liées aux variables essentielles α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 et α_6 par les relations

$$u_1 = f_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_2 = f_{34}(\alpha_3, \alpha_4), \quad u_3 = f_{56}(\alpha_5, \alpha_6),$$
$$v_1 = g_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \quad v_2 = g_{34}(\alpha_3, \alpha_4), \quad v_3 = g_{56}(\alpha_5, \alpha_6).$$

Le système d'équations (11.1) et (11.2) est remplacé alors par le système

$$\left.\begin{aligned} f_{12} + f_{34} = f_{56}, \\ g_{12} + g_{34} = g_{56}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.3)$$

L'abaque de ce système s'obtient par la mise en place des champs binaires (α_1, α_2), (α_3, α_4), (α_5, α_6) dans les réseaux (u_1, v_1), (u_2, v_2) et (u_3, v_3) de l'abaque de la figure 254. En éliminant ensuite les réseaux attribués aux variables auxiliaires, on est conduit à l'abaque de la figure 255.

Les champs (α_1, α_2) et (α_3, α_4) sont dits *champs extrêmes*, le champ (α_5, α_6) *champ central*. L'abaque de la figure 255 s'appelle

abaque barycentrique. Le système d'équations (11.3) se résout par la localisation du milieu du segment joignant les points donnés

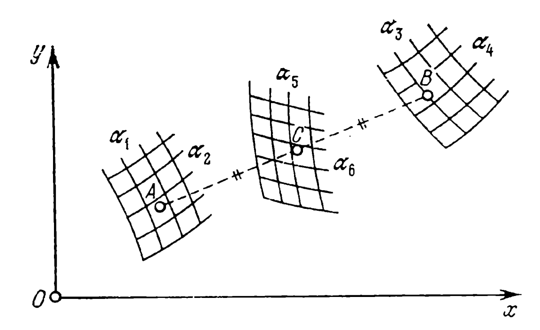


Fig. 255. Schéma d'un abaque barycentrique pour le système d'équations $f_{12} + f_{34} = f_{56}$, $g_{12} + g_{34} = g_{56}$

des deux champs binaires extrêmes. Les équations des éléments de l'abaque sont consignées dans le tableau 34. Il est commode

Tableau 34

Coordonnées	Champ extrême (α_1, α_2)	Champ extrême (α_3, α_4)	Champ central (α_5, α_6)
x	f_{12}	f_{34}	$0{,}5\ f_{56}$
y	g_{12}	g_{34}	$0{,}5\ g_{56}$

de mettre ces équations sous la forme concise

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} x & f_{12} & f_{34} & 0{,}5\ f_{56} \\ \hline y & g_{12} & g_{34} & 0{,}5\ g_{56} \end{array}\right|.$$

L'abaque de la figure 255 peut être construit directement à l'aide des équations citées sans le concours des réseaux auxiliaires (u_1, v_1), (u_2, v_2) et (u_3, v_3).

§ 11.2. Méthode de construction des abaques barycentriques

Portons dans les équations des éléments de l'abaque les paramètres de transformation a_0, a, b_0, b, μ_x, μ_y, δ_x et δ_y. A cet effet transformons identiquement le système d'équations (11.3). Multiplions la deuxième équation par δ_x, additionnons avec la première

et multiplions les deux membres de l'équation obtenue par μ_x:

$$\mu_x (f_{12} + \delta_x g_{12}) + \mu_x (f_{34} + \delta_x g_{34}) = \mu_x (f_{56} + \delta_x g_{56}).$$

Multiplions la première équation du système (11.3) par δ_y, ajoutons à la deuxième équation et multiplions par μ_y les deux membres de l'équation obtenue:

$$\mu_y (\delta_y f_{12} + g_{12}) + \mu_y (\delta_y f_{34} + g_{34}) = \mu_y (\delta_y f_{56} + g_{56}).$$

Ajoutons les équations obtenues aux identités

$$(a_0 - a) + (a_0 + a) = 2a_0, \quad (b_0 - b) + (b_0 + b) = 2b_0.$$

On est conduit de nouveau à un système de deux équations s'apparentant à la forme (11.3)

$$[a_0 - a + \mu_x (f_{12} + \delta_x g_{12})] + [a_0 + a + \mu_x (f_{34} + \delta_x g_{34})] = \\ = [2a_0 + \mu_x (f_{56} + \delta_x g_{56})],$$

$$[b_0 - b + \mu_y (\delta_y f_{12} + g_{12})] + [b_0 + b + \mu_y (\delta_y f_{34} + g_{34})] = \\ = [2b_0 + \mu_y (\delta_y f_{56} + g_{56})].$$

Les nouvelles équations des éléments de l'abaque sont définies par le tableau 35.

Tableau 35

Coordonnées	Champ extrême (α_1, α_2)	Champ extrême (α_3, α_4)	Champ central (α_5, α_6)
x	$a_0 - a + \mu_x (f_{12} + \delta_x g_{12})$	$a_0 + a + \mu_x (f_{34} + \delta_x g_{34})$	$a_0 + 0{,}5\mu_x (f_{56} + \delta_x g_{56})$
y	$b_0 - b + \mu_y (\delta_y f_{12} + g_{12})$	$b_0 + b + \mu_y (\delta_y f_{34} + g_{34})$	$b_0 + 0{,}5\mu_y (\delta_y f_{56} + g_{56})$

Pour construire l'abaque barycentrique, il faut choisir les paramètres de transformation. Ecrivons tout d'abord les équations des éléments de l'abaque et analysons-les. Choisissons les valeurs des paramètres μ_x, μ_y, δ_x, δ_y et traçons l'esquisse des champs binaires, chacun dans son système de coordonnées. A cet effet utilisons les équations du tableau 35 avec $a_0 = b_0 = a = b = 0$. Mettons à profit le choix arbitraire des paramètres a et b pour déterminer une position convenable de deux champs binaires quelconques, les champs extrêmes par exemple. Le champ central sera mis en place par résolution d'un exemple numérique. Fixons ensuite un système commun de coordonnées et calculons les valeurs a_0, b_0, a et b des paramètres, correspondant à la disposition choisie des champs binaires et du système de coordonnées. Calculons ensuite définitivement et construisons l'abaque.

Le mode d'emploi de l'abaque barycentrique (fig. 255) implique soit la bissection du segment donné lorsque le champ de résolution est le champ binaire central, soit le report sur une droite d'un segment égal au segment donné lorsque le champ de résolution est l'un des champs extrêmes.

Pour effectuer ces opérations on peut se servir d'un double décimètre ordinaire.

Le compas à trois pointes est très commode (fig. 256). Les points M, N, K et L figurent des articulations; $MNKL$ est un losange; la pointe médiane du compas se déplace librement sur une verticale. Grâce à ce dispositif les points A, B et C sont toujours alignés et $AC = CB$. Ce compas peut servir à déterminer aussi bien le point C que l'un des points A et B.

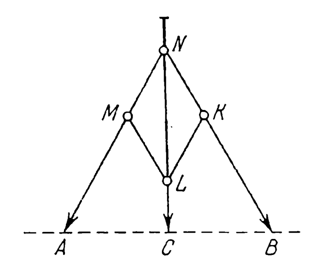


Fig. 256. Schéma d'un compas à trois pieds pour le positionnement du point de résolution C dans l'abaque barycentrique de la figure 255, A et B étant donnés

Pour positionner le point C on peut également fabriquer une règle à un point fixe et à deux échelles métriques, dont l'une, t', a pour module 2 m et l'autre, t'', a pour module m. Les abscisses du point fixe et des échelles t' et t'' sont données par les équations:

point fixe:

$$x = 0;$$

échelle t':

$$x = 2m\,(t' + a);$$

échelle t'':

$$x = m\,(t'' + a).$$

m et a sont des paramètres. La figure 257 représente une règle construite pour $m = 5$ mm et $a = 35$. Le mode d'emploi est le suivant.

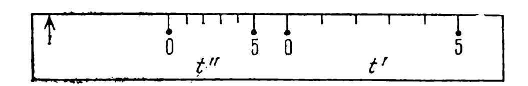


Fig. 257. Règle pour la détermination du point de résolution C dans l'abaque barycentrique de la figure 255, A et B étant donnés

Appliquer la règle sur les points A et B de l'abaque de la figure 255 de telle sorte que le point fixe de celle-ci tombe sur le point A. Le point B définit un point de cote t^* sur l'échelle t'. En face du point de l'échelle t'' coté t^* il faut repérer le point C et y lire deux réponses. En effet, le mode d'emploi de la règle et les équations de ses éléments entraî-

nent

$$AB = 2m\,(t^* + a), \quad AC = m\,(t^* + a),$$

i.e.

$$AC = 0{,}5\ AB.$$

Pour positionner le point B correspondant aux points A et C on peut se servir d'un double décimètre et d'un compas comme le montre la figure 258. Plaçons les pointes du compas aux points donnés A et C et appliquons la règle contre eux. Faisons ensuite pivoter le compas autour du point C jusqu'à ce que l'autre pointe coupe la ligne en B.

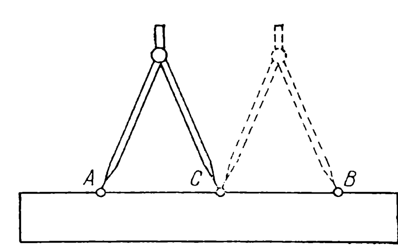


Fig. 258. Détermination du point de résolution B correspondant aux points A et C donnés dans l'abaque barycentrique de la figure 255 à l'aide d'une règle et d'un compas

Pour résoudre le même problème il est conseillé de préparer une règle à deux échelles métriques et un point fixe (cf. fig. 259) sur laquelle on portera, à une distance a du point fixe, des échelles métriques t' et t'' de même module mais de sens contraires.

Exemple 72. Construisons un abaque de ce type pour la détermination de la vitesse et du niveau de l'eau dans des conduites circulaires [42].

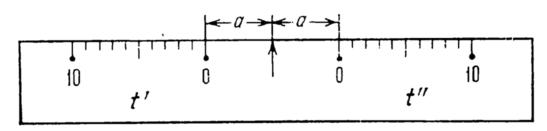


Fig. 259. Règle pour la détermination du point de résolution B correspondant aux points A et C donnés dans l'abaque barycentrique de la figure 255

Le système d'équations s'écrit

$$v = C\sqrt{Ri}, \qquad Q = \omega v, \tag{11.4}$$

où les variables auxiliaires C, ω et R sont données par les formules

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{1}{n} R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)}, \\ \omega &= d^2\,[0{,}25 \arccos(1-2\eta) - (0{,}5-\eta)\sqrt{\eta-\eta^2}], \\ R &= d\,\frac{0{,}25 \arccos(1-2\eta) - (0{,}5-\eta)\sqrt{\eta-\eta^2}}{\arccos(1-2\eta)}. \end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

v est la vitesse en m/s; Q le débit en m³/s; i la déclivité; n le coefficient de rugosité; d le diamètre intérieur de la conduite en m; η le niveau d'eau dans la conduite.

Les intervalles de variation sont: $0{,}010 \leqslant n \leqslant 0{,}017$; $0{,}05 \leqslant d \leqslant 0{,}5$ m; $0{,}001 \leqslant Q \leqslant 0{,}1$ m³/s; $0{,}001 \leqslant i \leqslant 0{,}1$; $0{,}1 \leqslant v \leqslant 3$ m/s; $0{,}2 \leqslant \eta \leqslant 0{,}8$.

Remplaçons la première formule (11.5) par la formule approchée

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} A(n, d),$$

où

$$A(n, d) = (0{,}25d)^{2{,}5\sqrt{n} - 0{,}13 - 0{,}75\sqrt{0{,}25d}\,(\sqrt{n} - 0{,}1) - 1/6}.$$

L'erreur due à cette substitution ne dépasse pas 1 % dans les intervalles donnés de variation des variables n et d. Posons

$$f(\eta) = 0{,}25 \arccos(1 - 2\eta) - (0{,}5 - \eta)\sqrt{\eta - \eta^2},$$

$$g(\eta) = \frac{0{,}25 \arccos(1 - 2\eta) - (0{,}5 - \eta)\sqrt{\eta - \eta^2}}{\arccos(1 - 2\eta)}.$$

Mettons le système d'équations (11.4) sous la forme

$$v = i^{0{,}5}\frac{A(n, d)\, d^{2/3}}{n}\, g(\eta)^{2/3}, \quad Q = d^2 v f(\eta).$$

Prenons le logarithme de ce système puis ramenons-le à la forme (11.3)

$$\left.\begin{aligned} \log i^{0{,}5} + \log \frac{A(n, d)\, d^{2/3}}{n} &= \log [v g(\eta)^{-2/3}], \\ \log Q - \log d^2 &= \log [v f(\eta)]. \end{aligned}\right\}$$

Il vient

$$f_{12} = \log i^{0{,}5}, \quad f_{34} = \log \frac{A(n, d)\, d^{2/3}}{n}, \quad f_{56} = \log [v g(\eta)^{-2/3}],$$

$$g_{12} = \log Q, \quad g_{34} = -\log d^2, \quad g_{56} = \log [v f(\eta)].$$

Sur la figure 260 est tracé l'abaque représentatif des équations du tableau 35 pour $\mu_x = 25$ mm, $\mu_y = 100$ mm, $\delta_x = \delta_y = 0$, $a_0 = a = 25$ mm, $b_0 = b = -180$ mm.

Soit à déterminer η et v correspondant à $Q = 0{,}02$ m³/s, $i = 0{,}01$, $n = 0{,}013$, $d = 0{,}25$ m.

Traçons le segment de droite qui joint les points donnés des champs (Q, i) et (n, d) et déterminons son milieu. Les cotes des lignes η et v passant par ce milieu font connaître les réponses $\eta = 0{,}4$; $v = 1{,}15$ m/s. La droite en pointillé figure la solution de cet exemple.

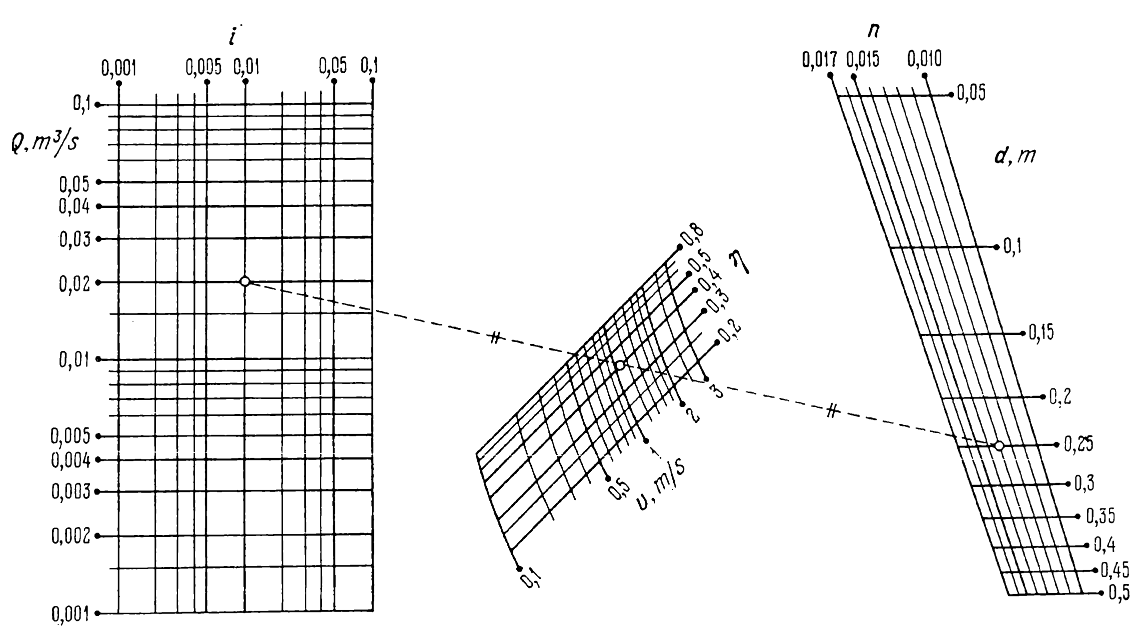


Fig. 260. Abaque barycentrique pour la détermination de η et v à partir du système d'équations (11.4)

§ 11.3. Rattachement de certains cas particuliers d'abaques barycentriques à des abaques adaptés à points équidistants

Soit à représenter les cas particuliers suivants du système (11.3)

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} = f_3 + f_{45}, \\ g_{12} = g_{36} + g_4; \end{array}\right\} \quad (11.6)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} = f_3, \\ g_{12} = g_4; \end{array}\right\} \quad (11.7)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} = f_3 + f_4, \\ g_{12} = g_{35}. \end{array}\right\} \quad (11.8)$$

Le trait remarquable des abaques barycentriques représentatifs de ces relations est d'être aussi des abaques adaptés à points équidistants.

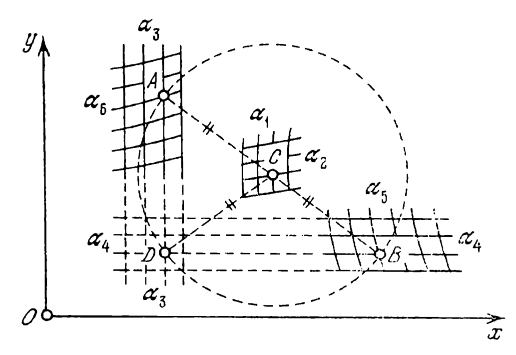


Fig. 261. Schéma d'un abaque barycentrique qui est en même temps adapté à points équidistants pour la résolution du système d'équations $f_{12} = f_3 + f_{45}$, $g_{12} = g_{36} + g_4$

Représentation de la forme (11.6). Mettons le système d'équations (11.6) sous la forme (11.3)

$$\left.\begin{array}{l} f_3 + f_{45} = f_{12}, \\ g_{36} + g_4 = g_{12} \end{array}\right\}$$

et écrivons les équations de son abaque barycentrique:

x	f_3	f_{45}	$0{,}5\ f_{12}$
y	g_{36}	g_4	$0{,}5\ g_{12}$

L'abaque est celui de la figure 261. Des équations des éléments il s'ensuit que les familles de droites parallèles α_3 et α_4 sont perpendi-

culaires. En se coupant elles constituent le champ orthogonal (α_3, α_4). Soient A, B, C des points des champs binaires dont les cotes vérifient l'équation (11.6). Désignons par D le point d'intersection des droites α_3 et α_4 passant respectivement par A et B. On a $CA = CD = CB$, i.e. les points A, B et D sont situés sur un cercle de centre C. L'abaque obtenu est à points équidistants. Donc l'abaque de la figure 261 est à double emploi. On peut s'en servir comme un abaque barycentrique ou comme un abaque à points équidistants.

Les équations des éléments de l'abaque après introduction des paramètres de transformation sont consignées dans le tableau 36 (les paramètres δ_x et δ_y sont supposés nuls pour conserver l'orthogonalité des droites α_3 et α_4.

Tableau 36

Coordonnées	Champ extrême (α_3, α_6)	Champ extrême (α_4, α_5)	Champ central (α_1, α_2)
x	$a_0 - a + \mu_x f_3$	$a_0 + a + \mu_x f_{45}$	$a_0 + 0{,}5\ \mu_x f_{12}$
y	$b_0 - b + \mu_y g_{36}$	$b_0 + b + \mu_y g_4$	$b_0 + 0{,}5\ \mu_y g_{12}$

Représentation du système d'équations (11.7). Le système (11.7) est un cas particulier du système (11.6). Pour le représenter par un abaque mettons-le sous la forme (11.6)

$$\left.\begin{aligned} f_{12} &= f_3 + 0, \\ g_{12} &= 0 + g_4. \end{aligned}\right\}$$

Les équations de ses éléments sont :

x	f_3	0	$0{,}5\, f_{12}$
y	0	g_4	$0{,}5\, g_{12}$

L'abaque est représenté sur la figure 262, avec son mode d'emploi. Il est constitué des échelles α_3, α_4, du champ (α_1, α_2) ainsi que du point fixe O, l'origine des coordonnées. Selon qu'on voudra positionner α_1 et α_2 ou α_3 et α_4 on s'en servira comme d'un abaque barycentrique ou comme d'un abaque à points équidistants en lui adjoignant le point O. Les équations des éléments de l'abaque contenant les paramètres de transformation sont définies par le tableau 36 si l'on y pose $f_{45} = g_{36} = 0$.

Représentation du système d'équations (11.8). Le système (11.8) est aussi un cas particulier du système (11.6). Pour le représenter par un abaque réduisons-le à la forme (11.6)

$$\left.\begin{aligned} f_{12} &= f_3 + f_4, \\ g_{12} &= g_{35} + 0. \end{aligned}\right\}$$

Les équations des éléments de l'abaque sont:

x	f_3	f_4	$0{,}5\, f_{12}$
y	g_{35}	0	$0{,}5\, g_{12}$

L'abaque est celui de la figure 263. Les équations des éléments de l'abaque renfermant les paramètres de transformation sont définies par le tableau 36 si l'on y pose

$$f_{45} = f_4, \quad g_{36} = g_{35}, \quad g_4 = 0.$$

On peut se servir de l'abaque de la figure 263 comme d'un abaque barycentrique ou comme d'un abaque à points équidistants.

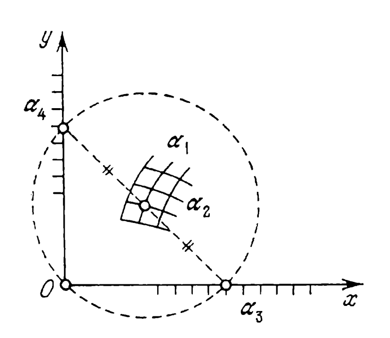


Fig. 262. Schéma d'un abaque barycentrique qui est en même temps adapté à points équidistants pour la résolution du système d'équations $f_{12} = f_3$, $g_{12} = g_4$

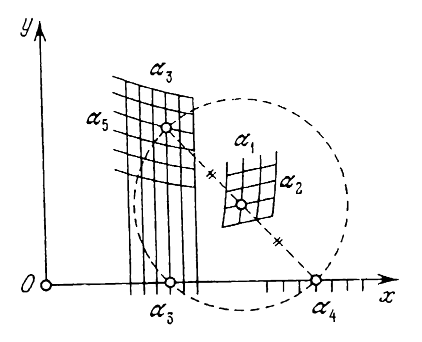


Fig. 263. Schéma d'un abaque barycentrique qui est en même temps adapté à points équidistants pour la résolution du système d'équations $f_{12} = f_3 + f_4$, $g_{12} = g_{35}$

Exemple 73. Construisons un abaque pour la détermination de i et v à partir du système d'équations [42]

$$Q = f(n, d) \sqrt{i}, \quad Q = g(d)\, v, \tag{11.9}$$

où pour abréger on a posé

$$f(n, d) = \frac{4\pi}{n} (0{,}25d)^{2{,}37+1{,}25\sqrt{d}-0{,}375\sqrt{d}\,(\sqrt{n}-0{,}1)}, \quad g(d) = 0{,}25\pi d^2.$$

Q représente le débit en m³/s, v la vitesse en m/s, d le diamètre intérieur de la conduite en m, n le coefficient de rugosité, i la perte de pression par mètre courant. Les variables évoluent entre $0{,}01 \leqslant Q \leqslant 0{,}1$ m³/s; $0{,}2 \leqslant v \leqslant 5$ m/s; $0{,}010 \leqslant n \leqslant 0{,}020$; $0{,}05 \leqslant d \leqslant 0{,}5$ m; $0{,}01 \leqslant i \leqslant 100$.

Réduisons le système d'équations (11.9) à la forme (11.8)

$$\left.\begin{aligned} -\log f(n,\ d) &= -\log Q + \log \sqrt{i}, \\ \log g(d) &= \log \frac{Q}{v}. \end{aligned}\right\}$$

Les équations des éléments de l'abaque sont:

x	$-\log Q$	$\log \sqrt{i}$	$-0{,}5 \log f(n, d)$
y	$\log \frac{Q}{v}$	0	$0{,}5 \log g(d)$

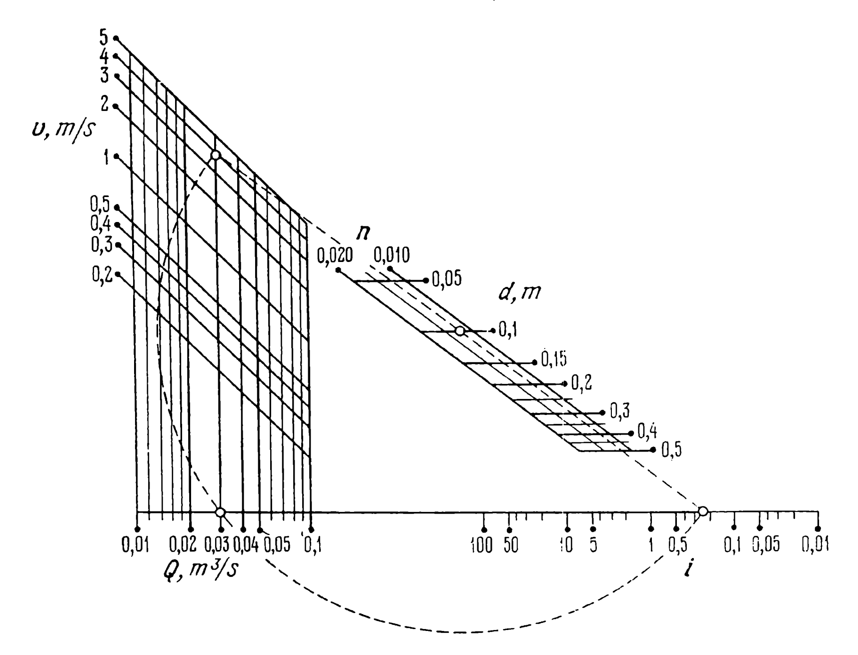


Fig. 264. Abaque tracé d'après le schéma 263 pour la détermination de i, v ou Q, v à partir du système d'équations (11.9)

Les équations des éléments de l'abaque contenant les paramètres de transformation sont consignées dans le tableau 37. L'abaque de la figure 264 est mis en place par les équations du tableau 37 pour $a_0 =$ $= 125$ mm, $b_0 = 190$ mm, $\mu_x = 50$ mm, $\mu_y = 50$ mm, $a = 175$ mm, $b = -40$ mm.

Pour déterminer i et v on se servira de cet abaque comme d'un abaque à points équidistants. Supposons que $n = 0{,}012$; $d = 0{,}1$ m;

Tableau 37

Coordonnées	Champ extrême (Q, v)	Echelle extrême i	Champ central (n, d)
x	$a_0 - a - \mu_x \log Q$	$a_0 + a + \mu_x \log \sqrt{i}$	$a_0 - 0{,}5\, \mu_x \log f(n, d)$
y	$b_0 - b + \mu_y \log \frac{Q}{v}$	$b_0 + b$	$b_0 + 0{,}5\, \mu_y \log g(d)$

$Q = 0{,}03$ m³/s. On déduit que $i = 0{,}24$ et $v = 3{,}8$ m/s. La solution est figurée par l'arc de cercle pointillé sur l'abaque.

Pour déterminer Q et v on se servira de cet abaque comme d'un abaque barycentrique. Supposons que $n = 0{,}012$; $d = 0{,}1$ m ; $i = 0{,}24$. Il vient : $Q = 0{,}03$ m³/s, $v = 3{,}8$ m/s. La solution est figurée par la droite en pointillé.

§ 11.4. Abaques barycentriques pour des relations entre cinq variables

En éliminant la variable α_6 entre les équations du système (11.3), on obtient une forme à cinq variables

$$f_5 = F(f_{12} + f_{34},\quad g_{12} + g_{34}). \tag{11.10}$$

L'abaque barycentrique représentant cette forme est celui de la figure 255 privée de la famille de lignes attribuée à la variable éliminée α_6. Seule la variable α_5 peut être de résolution.

Pour représenter cette équation à cinq variables par un abaque barycentrique essayons par l'intermédiaire de variables auxiliaires de la ramener à la forme (11.3). Ainsi, s'agissant de la forme (11.10), substituons-lui les équations

$$f_{12} + f_{34} = M, \tag{11.11}$$

$$g_{12} + g_{34} = N, \tag{11.12}$$

$$f_5 = F(M, N), \tag{11.13}$$

où M et N sont des variables auxiliaires. Les équations (11.11) et (11.12) s'apparentant à la forme (11.3) sont susceptibles d'être représentées par un abaque barycentrique à champs (α_1, α_2), (α_3, α_4) et (M, N). Mettons en place la famille de lignes α_5 représentative de l'équation (11.13) dans le champ (M, N) considéré comme réseau fonctionnel puis retirons le réseau (M, N) de l'abaque.

A signaler que le système d'équations (11.11) et (11.12) peut également être représenté par un abaque dans lequel le champ (M, N) sera extrême. Il suffit seulement de ramener le système d'équations

(11.11) et (11.12) à la forme (11.3) moyennant la transformation

$$\left.\begin{aligned} f_{12}-M &= -f_{34}, \\ g_{12}-N &= -g_{34}. \end{aligned}\right\}$$

On aura intérêt à lire cet abaque avec la règle de la figure 259.

Exemple 74. Construisons un abaque barycentrique pour la détermination de la longueur théorique de la zone de drainage incomplet L d'après la formule [42]

$$L = 0{,}73\,\frac{k_1 m_1 + k_s m_s}{k_s}\log\frac{8m_s}{\pi d} - 0{,}73\,(m_s + m_1)\log\frac{4m_s}{m_s + m_1} - \\ - 1{,}5\,(m_1 - m_s)\left(\frac{k_1 - k_s}{k_1 + k_s}\right)^2 \log\frac{k_1 m_1 + k_s m_s}{k_1 m_1}, \qquad (11.14)$$

où d est le diamètre théorique du drain en m, m_s l'épaisseur de la couche supérieure en m, m_1 l'épaisseur de la couche inférieure en m, k_s le coefficient de filtration de la couche supérieure en mètre par jour, k_1 le coefficient de filtration de la couche inférieure en mètre par jour; L la longueur de la zone de drainage incomplet en m.

Mettons l'équation (11.14) sous la forme

$$L = m_s f_{12}\cdot\left(\log\frac{8m_s}{\pi d} - \frac{g_{12}}{f_{12}}\right), \qquad (11.15)$$

où

$$f_{12} = f_{12}\left(\frac{k_1}{k_s},\ \frac{m_1}{m_s}\right) = 0{,}73\left(1 + \frac{k_1}{k_s}\cdot\frac{m_1}{m_s}\right),$$

$$g_{12} = g_{12}\left(\frac{k_1}{k_s},\ \frac{m_1}{m_s}\right) = 0{,}73\left(1 + \frac{m_1}{m_s}\right)\log\frac{4}{1 + \frac{m_1}{m_s}} + \\ + 1{,}5\left(\frac{m_1}{m_s} - 1\right)\left(\frac{\frac{k_1}{k_s} - 1}{\frac{k_1}{k_s} + 1}\right)^2 \log\left(1 + \frac{1}{\frac{k_1}{k_s}\cdot\frac{m_1}{m_s}}\right).$$

Remplaçons l'équation (11.15) par le système

$$L = 10^M N, \qquad (11.16)$$

$$10^M = m_s f_{12}, \qquad (11.17)$$

$$N = \log\frac{8m_s}{\pi d} - \frac{g_{12}}{f_{12}}, \qquad (11.18)$$

où M et N sont des variables auxiliaires. Réduisons les équations (11.17) et (11.18) à la forme (11.3)

$$\left.\begin{aligned} \log m_s + \log f_{12} &= M, \\ \log\frac{8m_s}{\pi d} - \frac{g_{12}}{f_{12}} &= N. \end{aligned}\right\}$$

Dans le tableau 38 sont consignées les équations des éléments de l'abaque, renfermant les paramètres de transformation a_0, b_0, μ_x, μ_y, a et b. Les paramètres δ_x et δ_y sont supposés nuls.

Tableau 38

Coordonnées	Champ extrême (m_s, d)	Champ extrême (k_1/k_s, m_1/m_s)	Champ central (M, N)
x	$a_0 - a + \mu_x \log m_s$	$a_0 + a + \mu_x \log f_{12}$	$a_0 + 0{,}5\,\mu_x M$
y	$b_0 - b + \mu_y \log \frac{8m_s}{\pi d}$	$b_0 + b - \mu_y \frac{g_{12}}{f_{12}}$	$b_0 + 0{,}5\,\mu_y N$

Prenons les intervalles suivants de variation des variables: $1 \leqslant m \leqslant 10$ m, $0{,}1 \leqslant d \leqslant 2$m, $1 \leqslant \frac{k_1}{k_s} \leqslant 4$, $5 \leqslant \frac{m_1}{m_s} \leqslant 20$, $10 \leqslant L \leqslant 2000$ m. Sur la figure 265 est tracé l'abaque mis en place

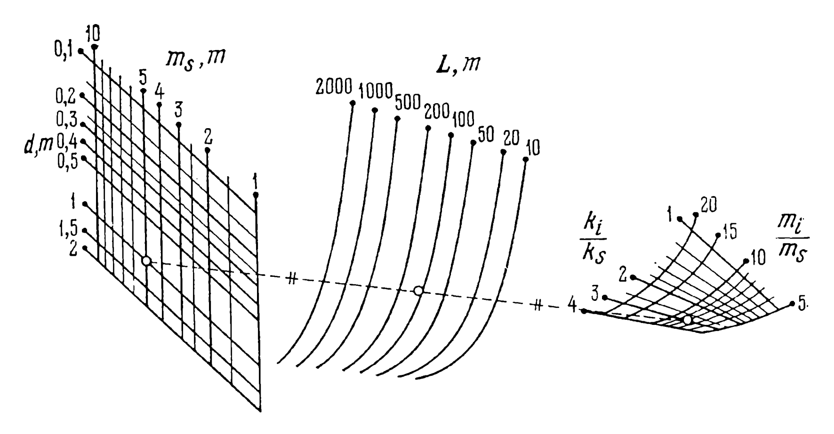


Fig. 265. Abaque barycentrique pour le calcul de L avec la formule (11.14)

par les équations du tableau 38, sur ces intervalles de variation, pour $\mu_x = -100$ mm, $\mu_y = 100$ mm, $a_0 = a = 200$ mm, $b_0 = b = 25$ mm. La famille de lignes L a été mise en place dans le champ (M, N) par l'équation (11.16).

Déterminons la valeur de L correspondant à $m_s = 5$ m, $m_1 = 40$ m, $k_1 = 3$m/jour, $k_s = 1$m/jour, $d = 1$ m. On a $k_1/k_s = 3$ et $m_1/m_s = 8$. La cote de la ligne L passant par le milieu du segment joignant les points donnés des champs (m_s, d) et (k_1/k_s, m_1/m_s) donne la réponse $L = 110$ m. La solution de cet exemple est figurée par la droite en pointillé.

§ 11.5. Abaques barycentriques composés

On appelle *abaques barycentriques composés* des abaques constitués de plusieurs abaques simples du même type. Les éléments communs des abaques barycentriques composés peuvent être aussi bien les champs extrêmes que les champs centraux. Considérons le cas le plus simple d'un abaque barycentrique composé représentant un système de deux équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} f_{12}-f_{56}&=f_{34}-f_{78}, \\ g_{12}-g_{56}&=g_{34}-g_{78}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.19)$$

On distinguera deux types d'abaques barycentriques composés: l'*abaque en chaîne* et l'*abaque rhomboïdal.*

Abaque en chaîne. Mettons le système (11.19) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} f_{12}-f_{34}&=f_{56}-f_{78}=\alpha, \\ g_{12}-g_{34}&=g_{56}-g_{78}=\beta, \end{aligned}\right\} \qquad (11.20)$$

où α et β sont des variables auxiliaires. Décomposons les équations (11.20) en deux systèmes d'équations

$$\left.\begin{aligned} f_{12}-f_{34}&=\alpha, \\ g_{12}-g_{34}&=\beta, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} f_{56}-f_{78}&=\alpha, \\ g_{56}-g_{78}&=\beta. \end{aligned}\right\}$$

Mettons ces derniers sous la forme

$$\left.\begin{aligned} f_{12}-\alpha&=f_{34}, \\ g_{12}-\beta&=g_{34}, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -\alpha-f_{78}&=-f_{56}, \\ -\beta-g_{78}&=-g_{56} \end{aligned}\right\}$$

et représentons-les par des abaques barycentriques. Les équations des éléments de ces abaques ont pour formule, dans un système de coordonnées commun:

x	f_{12}	$-\alpha$	$0{,}5\,f_{34}$
y	g_{12}	$-\beta$	$0{,}5\,g_{34}$

et

x	$-\alpha$	$-f_{78}$	$-0{,}5\,f_{56}$
y	$-\beta$	$-g_{78}$	$-0{,}5\,g_{56}$

.

Ces équations montrent que ces abaques possèdent en commun le champ extrême (α, β). L'abaque est représenté sur la figure 266. Le champ des variables auxiliaires α et β est tracé en pointillé. Pour la lecture de cet abaque on pourra se servir d'une règle à échelles (fig. 259) ou d'une règle et d'un compas (cf. fig. 258).

Abaque rhomboïdal. Mettons le système (11.19) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} f_{12}+f_{78}&=f_{56}+f_{34}=\alpha, \\ g_{12}+g_{78}&=g_{56}+g_{34}=\beta, \end{aligned}\right\} \qquad (11.21)$$

où α et β sont des variables auxiliaires. Décomposons les équations (11.21) en deux systèmes

$$\left.\begin{aligned} f_{12}+f_{78}&=\alpha,\\ g_{12}+g_{78}&=\beta; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} f_{56}+f_{34}&=\alpha,\\ g_{56}+g_{34}&=\beta, \end{aligned}\right\}$$

et représentons-les par des abaques barycentriques. Les équations de leurs éléments rapportés à un système de coordonnées xOy s'écrivent:

x	f_{12}	f_{78}	$0{,}5\,\alpha$
y	g_{12}	g_{78}	$0{,}5\,\beta$

,

x	f_{56}	f_{34}	$0{,}5\,\alpha$
y	g_{56}	g_{34}	$0{,}5\,\beta$

.

Ces équations montrent que les abaques ont en commun le champ central (α, β) des variables auxiliaires. L'abaque est représenté

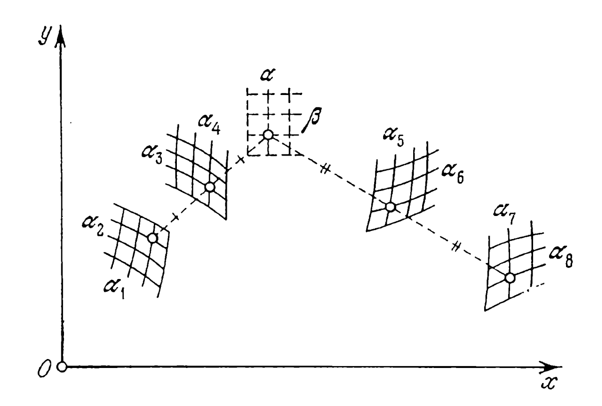


Fig. 266. Schéma d'un abaque barycentrique en chaîne pour le système d'équations $f_{12}-f_{56}=f_{34}-f_{78}$, $g_{12}-g_{56}=g_{34}-g_{78}$

sur la figure 267. Le champ des variables auxiliaires (α, β) n'a pas été tracé. Voyons comment positionner le point D correspondant à des points donnés A, B et C dans les champs binaires (α_1, α_2), (α_3, α_4), (α_5, α_6). Traçons le segment CB et déterminons son milieu E. Joignons A et E par une droite sur laquelle nous reporterons à partir du point E le segment $ED=AE$.

Le mode d'emploi de l'abaque entraîne que la figure $ABDC$ est un parallélogramme, i.e. $AB \parallel CD$ et $AC \parallel BD$. D'où le nom d'*abaque rhomboïdal* attribué à ce type d'abaque [12, 13]. Le parallélisme nous suggère un autre procédé de détermination du point D, à savoir, le point D est l'intersection de droites parallèles à AC et AB, passant par B et C (fig. 267).

En éliminant la variable α_8 entre les équations du système (11.19) et en inversant le signe des fonctions f_{12} et g_{12} on obtient l'équation à sept variables

$$f_7 = F\,(f_{12}+f_{34}+f_{56},\quad g_{12}+g_{34}+g_{56}). \qquad (11.22)$$

Pour tracer l'abaque de cette équation, il suffit de retirer des figures

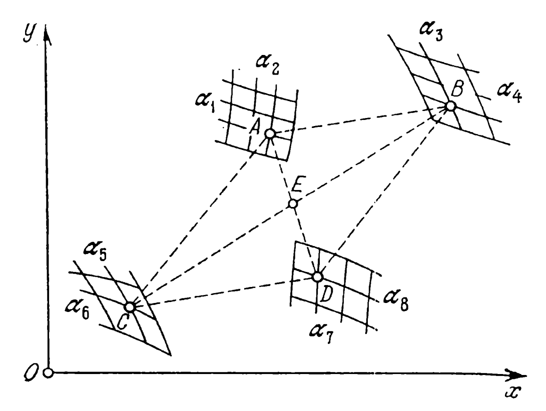


Fig. 267. Schéma d'un abaque rhomboïdal pour le système d'équations $f_{12} - f_{56} = f_{34} - f_{78}$, $g_{12} - g_{56} = g_{34} - g_{78}$

266 et 267 la famille de lignes attribuée à la variable éliminée α_8. Pour représenter l'équation (11.22), réduisons-la à la forme (11.19)

$$\left.\begin{aligned} -f_{12}-f_{56} &= f_{34}-M, \\ -g_{12}-g_{56} &= g_{34}-N, \end{aligned}\right\} \qquad (11.23)$$

où M et N sont des variables auxiliaires liées à la variable α_7 par la relation

$$f_7 = F\,(M,\ N). \qquad (11.24)$$

Après avoir tracé un abaque du type de la figure 266 ou 267 pour l'équation (11.23) on mettra en place la famille de lignes α_7 représentative de l'équation (11.24) dans les champs $(M,\ N)$.

§ 11.6. Méthode de construction des abaques rhomboïdaux

Ramenons l'équation donnée à la forme (11.19). Ecrivons les équations des éléments de l'abaque

x	f_{12}	f_{34}	f_{56}	f_{78}
y	g_{12}	g_{34}	g_{56}	g_{78}

,

puis indépendamment l'un de l'autre traçons quatre champs binaires d'équations

$$x_i = \mu_x (f_i + \delta_x g_i), \quad y_i = \mu_y (\delta_y f_i + g_i),$$

où $i = 12,\ 34,\ 56,\ 78$. Disposons les trois champs binaires de façon compacte en respectant le parallélisme des axes des abscisses. Le quatrième champ sera positionné à l'aide d'un exemple numérique.

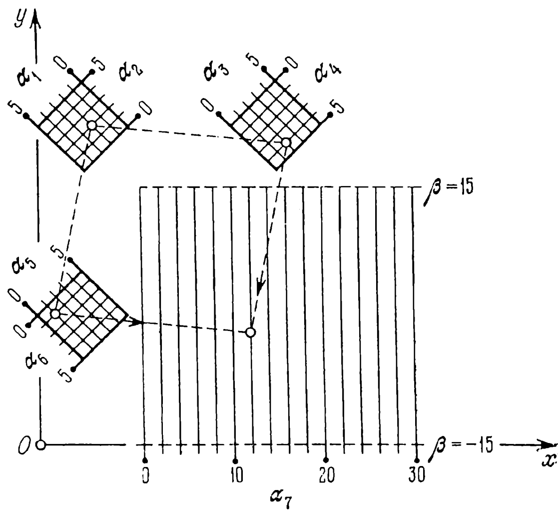


Fig. 268. Abaque rhomboïdal pour le calcul de α_7 par la formule $\alpha_7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$

Exemple 75. Traçons un abaque rhomboïdal représentant la formule

$$\alpha_7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \tag{11.25}$$

entre $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \leqslant 5$; $0 \leqslant \alpha_7 \leqslant 30$.

Introduisons la variable auxiliaire β

$$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 \tag{11.26}$$

et ramenons les relations (11.25) et (11.26) à la forme (11.19)

$$\left.\begin{aligned} (-\alpha_1 - \alpha_2) - (\alpha_5 + \alpha_6) &= (\alpha_3 + \alpha_4) - \alpha_7, \\ (-\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_5 - \alpha_6) &= (\alpha_3 - \alpha_4) - \beta. \end{aligned}\right\}$$

Ecrivons les équations des éléments de l'abaque

x	$-\alpha_1 - \alpha_2$	$\alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_5 + \alpha_6$	α_7
y	$-\alpha_1 + \alpha_2$	$\alpha_3 - \alpha_4$	$\alpha_5 - \alpha_6$	β

.

On constate que ce sont des réseaux orthogonaux. Pour conserver cette propriété lors d'une transformation, il faut poser $\delta_x = \delta_y = 0$ et $m = n$. Déterminons à l'aide de (11.26) l'intervalle de variation de la variable auxiliaire β:

$$-15 \leqslant \beta \leqslant 15.$$

La figure 268 représente l'abaque construit par la méthode indiquée pour $m = 2{,}5$ mm. Les équations de ses éléments sont:

champ (α_1, α_2):

$$x = 0{,}25 + 2{,}5\,(-\alpha_1 - \alpha_2), \quad y = 92{,}5 + 2{,}5\,(-\alpha_1 + \alpha_2);$$

champ (α_3, α_4):

$$x = 55 + 2{,}5\,(\alpha_3 + \alpha_4), \quad y = 92{,}5 + 2{,}5\,(\alpha_3 - \alpha_4);$$

champ (α_5, α_6):

$$x = 2{,}5\,(\alpha_5 + \alpha_6), \quad y = 47{,}5 + 2{,}5\,(\alpha_5 - \alpha_6);$$

champ (α_7, β):

$$x = 30 + 2{,}5\,\alpha_7, \quad y = 47{,}5 + 2{,}5\,\beta.$$

L'abaque donne la solution de l'exemple numérique: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 4$, $\alpha_5 = 1$, $\alpha_6 = 1$; réponse $\alpha_7 = 12$.

CHAPITRE 12

AUTRES TYPES D'ABAQUES À UN PLAN

§ 12.1. Abaque général à points équidistants

L'*abaque général à points équidistants* de la figure 269 représente la relation à six variables

$$(f_{34} - f_{12})^2 + (g_{34} - g_{12})^2 = (f_{56} - f_{12})^2 + (g_{56} - g_{12})^2. \quad (12.1)$$

Il est constitué d'un champ des centres (α_1, α_2) et des champs des intersections (α_3, α_4), (α_5, α_6). Les équations de ses éléments sont consignées dans le tableau 39.

Tableau 39

Coordonnées	Champ des centres (α_1, α_2)	Champ des intersections (α_3, α_4)	Champ des intersections (α_5, α_6)
x	f_{12}	f_{34}	f_{56}
y	g_{12}	g_{34}	g_{56}

Soit à déterminer α_6 pour des valeurs données des autres variables. Repérons dans les champs binaires (α_1, α_2) et (α_3, α_4) les points A et B correspondant aux valeurs données des variables. Plaçons les pointes du compas en A et B. Sans en modifier l'ouverture faisons-le pivoter autour du point A jusqu'à son intersection C avec la ligne donnée α_5. La cote de la ligne α_6 passant par le point C fait connaître α_6.

Le mode d'emploi de l'abaque entraîne : $AB = AC$. Donc

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2,$$

où x_A et y_A, x_B et y_B, x_C et y_C sont les coordonnées des points A, B et C. En substituant à ces coordonnées les fonctions correspondantes du tableau 39, on obtient la forme canonique (12.1) qui dans la pratique se rencontre rarement sous sa forme complète. Son abaque présente le grave inconvénient de n'être pas transformable, i.e. est totalement inadaptable.

Seul peut retenir l'attention le cas particulier de (12.1), la forme de Cauchy à champ

$$f_1 f_{34} + f_2 g_{34} + h_{34} = 0. \qquad (12.2)$$

Elle se ramène à la forme (12.1) de la manière suivante :

$$(\sqrt{f_1} + 0)^2 + (0 - 0{,}5 f_2)^2 = \left(\sqrt{\frac{-h_{34}}{f_{34}} - \frac{g_{34}^2}{f_{34}^2}} - 0\right)^2 + \left(\frac{g_{34}}{f_{34}} - 0{,}5 f_2\right)^2.$$

L'abaque est représenté sur la figure 270. On peut introduire les

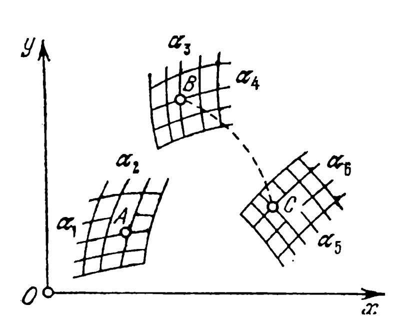


Fig. 269. Schéma d'un abaque général à points équidistants pour la forme $(f_{34} - f_{12})^2 + (g_{34} - g_{12})^2 = (f_{56} - f_{12})^2 + (g_{56} - g_{12})^2$

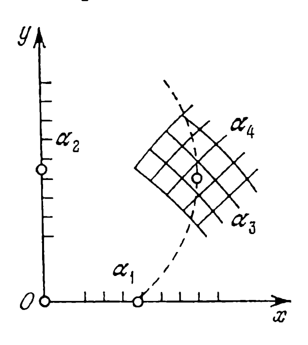


Fig. 270. Schéma d'un abaque à points équidistants pour la forme $f_1 f_{34} + f_2 g_{34} + h_{34} = 0$

paramètres m, n, a et b dans les équations de ses éléments en mettant préalablement (12.2) sous la forme

$$[m(f_1 - a)]\, f_{34} + [n(f_2 - b)] \left[\frac{m}{n} g_{34}\right] + m(af_{34} + bg_{34} + h_{34}) = 0.$$

Les équations des éléments de l'abaque sont déterminées à partir du tableau 40. Il est possible de transformer l'abaque par l'intermédiaire des paramètres introduits. Ceux-ci doivent être choisis tels

Tableau 40

Coordonnées	Echelle des centres α_2	Echelle des intersections α_1	Champ des intersections (α_3, α_4)
x	0	$\sqrt{m(f_1 - a)}$	$\sqrt{\frac{-m(af_{34} + bg_{34} + h_{34})}{f_{34}} - \frac{m^2}{n^2}\frac{g_{34}^2}{f_{34}^2}}$
y	$0{,}5\, n(f_2 - b)$	0	$\frac{m}{n}\frac{g_{34}}{f_{34}}$

que les radicaux des équations du tableau 40 soient positifs. A signaler que les abaques de ce type, représentatifs de la forme (12.2), sont rarement commodes à l'usage. Généralement, les abaques à points alignés, constitués de deux échelles rectilignes et d'un champ, sont bien plus souples.

Un cas particulier important de l'abaque général à points équidistants est l'abaque adapté à points équidistants représentatif de la forme

$$f_{12} = f_{34} + f_{35},$$

examiné au § 8.5 et au chapitre 9. Il se ramène à la forme (12.1) de la manière suivante

$$(f_{34} - 0{,}5f_{12})^2 + (T_3 - T_{12})^2 = (f_{35} - 0{,}5f_{12})^2 + (T_3 - T_{12})^2,$$

où T_3 et T_{12} sont des fonctions arbitraires.

Comme autres cas particuliers importants de l'abaque général à points équidistants, citons les abaques des figures 88 et 182 représentant les formes canoniques

$$w = F(u, v) \tag{12.3}$$

et

$$\varphi(u, v) = \psi(w, t). \tag{12.4}$$

Examinons tout d'abord la réduction de la forme (12.4) à la forme (12.1). Considérons la fonction arbitraire Φ des deux membres de l'équation (12.4)

$$\Phi[\varphi(u, v)] = \Phi[\psi(w, t)]$$

et désignons pour abréger

$$\Phi_{12} = \Phi[\varphi(u, v)], \quad \Phi_{34} = \Phi[\psi(w, t)].$$

Il vient

$$\Phi_{12} = \Phi_{34}.$$

Mettons l'équation obtenue sous la forme

$$(\sqrt{\Phi_{12} - T_{12}^2} - 0)^2 + (T_{12} - 0)^2 = (\sqrt{\Phi_{34} - T_{34}^2} - 0)^2 + (T_{34} - 0)^2,$$

où T_{12} et T_{34} sont des fonctions arbitraires des arguments correspondants. Les équations des éléments de l'abaque figurent au tableau 41. Les fonctions Φ, T_{12} et T_{34} doivent être choisies telles que les radicaux du tableau 41 soient positifs.

Tableau 41

Coordonnées	Point P	Champ des intersections (u, v)	Champ des intersections (w, t)
x	0	$\sqrt{\Phi_{12} - T_{12}^2}$	$\sqrt{\Phi_{34} - T_{34}^2}$
y	0	T_{12}	T_{34}

On représente de façon analogue l'équation (12.3) qui est un cas particulier de la forme (12.4) si l'on y pose t = const. Donc, les équations des éléments de l'abaque représentant la forme (12.3) se déduisent du tableau 41 par substitution de $\Phi\ [F\ (u,\ v)]$, $\Phi\ (w)$ et T_3 à Φ_{12}, Φ_{34} et T_{34}.

§ 12.2. Abaque général au compas

L'*abaque général au compas* de la figure 271 représente la relation à huit variables

$$(f_{34} - f_{12})^2 + (g_{34} - g_{12})^2 = (f_{78} - f_{56})^2 + (g_{78} - g_{56})^2. \qquad (12.5)$$

Les équations de ses éléments sont consignées dans le tableau 42.

Tableau 42

Coordonnées	Champ $(\alpha_1,\ \alpha_2)$	Champ $(\alpha_3,\ \alpha_4)$	Champ $(\alpha_5,\ \alpha_6)$	Champ $(\alpha_7,\ \alpha_8)$
x	f_{12}	f_{34}	f_{56}	f_{78}
y	g_{12}	g_{34}	g_{56}	g_{78}

Soit à déterminer la valeur α_8 correspondant aux valeurs données des autres variables. Repérons dans les champs binaires les points A, B et C correspondant aux valeurs données des variables. Mesurons AB au compas, puis sans modifier l'ouverture plaçons une pointe en C et l'autre sur la ligne α_7 au point D. La cote de la ligne α_8 passant par le point D fait connaître α_8.

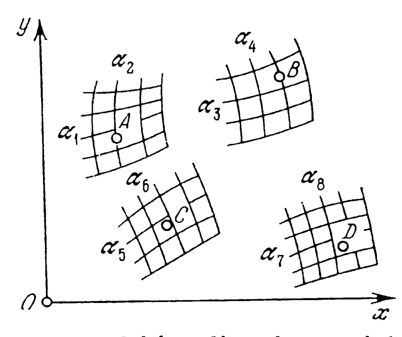


Fig. 271. Schéma d'un abaque général au compas pour la forme $(f_{34} - f_{12})^2 + (g_{34} - g_{12})^2 = (f_{78} - f_{56})^2 + (g_{78} - g_{56})^2$

Le mode d'emploi de l'abaque entraîne $AB = CD$. Donc

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2,$$

où x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D sont les coordonnées respectives des points A, B, C et D. En portant dans cette formule les expressions des coordonnées empruntées au tableau 42 on obtient la forme canonique (12.5).

La forme canonique (12.5) se présente rarement dans les applications. Son abaque possède l'inconvénient sérieux de ne permettre aucune transformation.

Un cas particulier important de l'abaque au compas général est l'abaque au compas adapté représentant la forme $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$, étudié plus haut (§ 8.6 et chapitre 10). Elle se ramène à la forme (12.5) de la manière suivante :

$$(-f_{13} - f_{12})^2 + (T_1 - T_1)^2 = (-f_{46} - f_{45})^2 + (T_4 - T_4)^2,$$

où T_1 et T_4 sont des fonctions arbitraires.

§ 12.3. Abaque à index parallèle

L'abaque général à index parallèle de la figure 272 représente la relation à huit variables

$$\frac{f_{34} - f_{12}}{g_{34} - g_{12}} = \frac{f_{78} - f_{56}}{g_{78} - g_{56}}. \qquad (12.6)$$

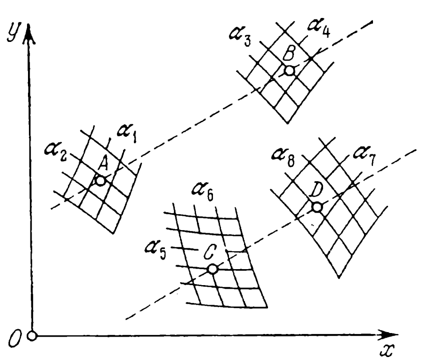


Fig. 272. Schéma d'un abaque à index parallèle pour la forme $\frac{f_{34} - f_{12}}{g_{34} - g_{12}} = \frac{f_{78} - f_{56}}{g_{78} - g_{56}}$

Les équations de ses éléments sont données dans le tableau 43.

Soit à déterminer α_8 pour des valeurs données des autres variables. Positionnons les points A, B et C correspondant aux valeurs données des variables dans les champs binaires. Menons par le point C une droite parallèle à AB jusqu'à son intersection D avec la ligne donnée α_7. La cote de la ligne α_8 passant par D fait connaître la réponse.

Tableau 43

Coordonnées	Champ (α_1, α_2)	Champ (α_3, α_4)	Champ (α_5, α_6)	Champ (α_7, α_8)
x	f_{12}	f_{34}	f_{56}	f_{78}
y	g_{12}	g_{34}	g_{56}	g_{78}

Le parallélisme des droites AB et CD entraîne

$$\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{x_D - x_C}{y_D - y_C},$$

où x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D sont les coordonnées des points A, B, C et D. En remplaçant dans cette équation les coordonnées par leurs expressions du tableau 43, on obtient la forme canonique (12.6).

Dans l'équation (12.6), on peut introduire identiquement toute une série de paramètres sans en modifier le type. En effet,

$$\frac{[a_0+\mu_x(f_{34}+\delta_x g_{34})]-[a_0+\mu_x(f_{12}+\delta_x g_{12})]}{[b_0+\mu_y(\delta_y f_{34}+g_{34})]-[b_0+\mu_y(\delta_y f_{12}+g_{12})]}=$$
$$=\frac{[a_0+a+\lambda\mu_x(f_{78}+\delta_x g_{78})]-[a_0+a+\lambda\mu_x(f_{56}+\delta_x g_{56})]}{[b_0+b+\lambda\mu_y(\delta_y f_{78}+g_{78})]-[b_0+b+\lambda\mu_y(\delta_y f_{56}+g_{56})]}.$$

On vérifie que cette équation s'apparente à l'équation initiale. Les nouvelles équations des éléments de l'abaque sont consignées dans le tableau 44.

Tableau 44

Coordonnées	Champ (α_1, α_2)	Champ (α_3, α_4)	Champ (α_5, α_6)	Champ (α_7, α_8)
x	$a_0+\mu_x(f_{12}+$ $+\delta_x g_{12})$	$a_0+\mu_x(f_{34}+$ $+\delta_x g_{34})$	$a_0+a+\lambda\mu_x\times$ $\times(f_{56}+\delta_x g_{56})$	$a_0+a+\lambda\mu_x\times$ $\times(f_{78}+\delta_x g_{78})$
y	$b_0+\mu_y(\delta_y f_{12}+$ $+g_{12})$	$b_0+\mu_y(\delta_y f_{34}+$ $+g_{34})$	$b_0+b+\lambda\mu_y\times$ $\times(\delta_y f_{56}+g_{56})$	$b_0+b+\lambda\mu_y\times$ $\times(\delta_y f_{78}+g_{78})$

Pour construire l'abaque il faut faire choix des paramètres introduits. Ecrivons tout d'abord les équations des éléments de l'abaque (tableau 43) et analysons-les. Choisissons ensuite les paramètres μ_x et μ_y et mettons en place les champs. Voyons ensuite s'il y a lieu d'introduire le paramètre λ et les paramètres de translation δ_x et δ_y. Le paramètre λ permet de modifier simultanément les dimensions des champs (α_5, α_6) et (α_7, α_8). Déterminons en dernier ressort les paramètres a_0, b_0, a et b. Les paramètres a et b permettent de déplacer les champs (α_5, α_6) et (α_7, α_8) par rapport aux champs (α_1, α_2) et (α_3, α_4). Si l'abaque est mis en place dans un système de coordonnées obliques, les équations de ses éléments se simplifient, puisque l'on peut poser $\delta_x = \delta_y = 0$. Dans ce cas la projection de l'abaque implique un choix approprié de l'angle des coordonnées.

Mettons en évidence les formes canoniques suivantes

$$f_{56}=\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}, \tag{12.7}$$

$$f_1 f_{34}+g_{34}=f_2 f_{56}+g_{56}, \tag{12.8}$$

$$f_1-f_2=f_3-f_4, \tag{12.9}$$

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{f_3}{f_4}. \tag{12.10}$$

Les équations du type (12.6) correspondant aux formes (12.7) à (12.10) sont représentées dans le tableau 45.

Tableau 45

Forme	Equation du type (12.6)
(12.7)	$\dfrac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}=\dfrac{0-f_{56}T_{56}}{0-T_{56}}$ (T_{56} est une fonction arbitraire)
(12.8)	$\dfrac{g_{34}/f_{34}-(-f_1)}{1/f_{34}-0}=\dfrac{g_{56}/f_{56}-(-f_2)}{1/f_{56}-0}$
(12.9)	$\dfrac{f_1-f_2}{1-0}=\dfrac{f_3-f_4}{1-0}$
(12.10)	$\dfrac{f_1-0}{0-f_2}=\dfrac{f_3-0}{0-f_4}$

Au § 8.6 nous avons établi que l'abaque au compas de la relation

$$f_{12}+f_{13}=f_{45}+f_{46}$$

pouvait être utilisé comme un abaque à index parallèle. Cette relation se réduit à la forme (12.6) de la manière suivante

$$\frac{f_{12}-f_{45}}{T_1-T_4}=\frac{(-f_{13})-(-f_{46})}{T_1-T_4},$$

où T_1 et T_4 sont des fonctions arbitraires.

Une transformation projective, par exemple une homologie, fait correspondre à l'abaque général à index parallèle un *abaque à points alignés composé, constitué d'une échelle muette et de quatre champs binaires liés par un double alignement.* On peut tracer immédiatement cet abaque en dissociant l'équation (12.6) en deux équations du type (6.26) par l'intermédiaire d'une variable auxiliaire α:

$$\alpha=\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}, \qquad \alpha=\frac{f_{78}-f_{56}}{g_{78}-g_{56}}.$$

Donc l'équation (12.6) (de même que ses cas particuliers, les formes (12.7) à (12.10)) peut toujours être représentée par un abaque à points alignés composé. Dans la plupart des cas il sera plus souple qu'un abaque à index parallèle. L'usage de l'abaque à index parallèle est à recommander lorsque ses champs binaires ou ses échelles possèdent une structure plus simple que dans l'abaque à points alignés.

§ 12.4. Abaque à index en équerre

Faisons pivoter de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre la région de la figure 272 qui contient les champs binaires (α_5, α_6) et (α_7, α_8). Les droites résolvantes AB et CD seront alors perpendi-

culaires. On obtient un *abaque à index en équerre*. Pour s'en servir il faut disposer d'un *transparent* portant deux droites perpendiculaires. L'abaque est tracé sur la figure 273. Il représente la même relation (12.6) que l'abaque à index parallèle.

Fig. 273. Schéma d'un abaque à index en équerre pour la forme $\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}=\frac{f_{78}-f_{56}}{g_{78}-g_{56}}$

Soit à déterminer une valeur α_8 correspondant à des valeurs données des autres variables. Appliquons le transparent sur le fond de telle sorte que les points A et B soient situés sur une perpendiculaire et le point C sur l'autre. La ligne α_8 passant par le point d'intersection D de la deuxième droite perpendiculaire avec la ligne α_7 fait connaître α_8.

Les équations des éléments de l'abaque sont déterminées par le tableau 44 si dans les équations des champs (α_5, α_6) et (α_7, α_8) on substitue y à x et $-x$ à y. Si par ailleurs on pose $\delta_x = \delta_y = a_0 = b_0 = 0$; $-b = \bar{a}$ et $a = \bar{b}$, les équations des éléments de l'abaque prennent une forme plus remarquable. Elles sont consignées dans le tableau 46.

Tableau 46

Coordonnées	Champ (α_1, α_2)	Champ (α_3, α_4)	Champ (α_5, α_6)	Champ (α_7, α_8)
x	$\mu_x f_{12}$	$\mu_x f_{34}$	$\bar{a}-\lambda\mu_y g_{56}$	$\bar{a}-\lambda\mu_y g_{78}$
y	$\mu_y g_{12}$	$\mu_y g_{34}$	$\bar{b}+\lambda\mu_x f_{56}$	$\bar{b}+\lambda\mu_x f_{78}$

Les abaques à index en équerre sont susceptibles de représenter également les cas particuliers de la forme (12.6), à savoir les relations (12.7) à (12.10).

§ 12.5. Abaques composés

Les abaques composés s'obtiennent par superposition d'abaques simples du même type ou de type différent de telle sorte que leurs éléments communs viennent en coïncidence. On peut ainsi réaliser la superposition d'abaques à entrecroisement, à points alignés et à points équidistants, au compas, à index en équerre, à index parallèle, barycentriques et rhomboïdaux. Considérons quelques exemples remarquables d'abaques composés de divers types.

Abaques à points alignés et barycentrique. Supposons que la proposée puisse être décomposée par l'intermédiaire des variables auxiliaires M et N en trois équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} f_{12}+M &= f_{34}, \\ g_{12}+N &= g_{34}, \\ \frac{f_{56}-M}{g_{56}-N} &= \frac{f_{78}-M}{g_{78}-N}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.11)$$

Les deux premières équations se représentent par un abaque barycentrique, la dernière par un abaque à points alignés. Les équations des éléments de ces abaques s'écrivent respectivement:

x	f_{12}	M	$0{,}5\,f_{34}$
y	g_{12}	N	$0{,}5\,g_{34}$

et

x	M	f_{56}	f_{78}
y	N	g_{56}	g_{78}

.

Les équations des champs binaires (M, N) sont les mêmes dans les deux abaques. On pourra donc superposer les champs (M, N). Ce

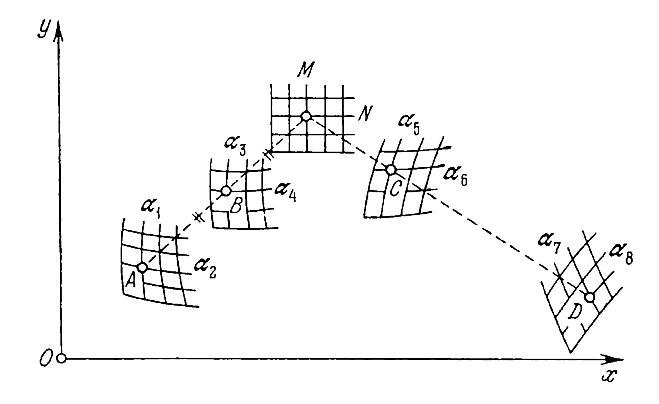


Fig. 274. Schéma d'un abaque composé pour l'équation $\frac{f_{56}-f_{34}+f_{12}}{g_{56}-g_{34}+g_{12}} = \frac{f_{78}-f_{34}+f_{12}}{g_{78}-g_{34}+g_{12}}$

faisant on obtient l'abaque composé de la figure 274 d'où l'on pourra retirer le champ binaire (M, N). L'élimination des variables M et N entre les équations du système (12.11) donne la relation à huit variables

$$\frac{f_{56}-f_{34}+f_{12}}{g_{56}-g_{34}+g_{12}} = \frac{f_{78}-f_{34}+f_{12}}{g_{78}-g_{34}+g_{12}}, \qquad (12.12)$$

représentée par l'abaque composé de la figure 274.

Soit à déterminer α_8. Repérons dans les champs binaires de l'abaque les points A, B et C correspondant aux valeurs données des

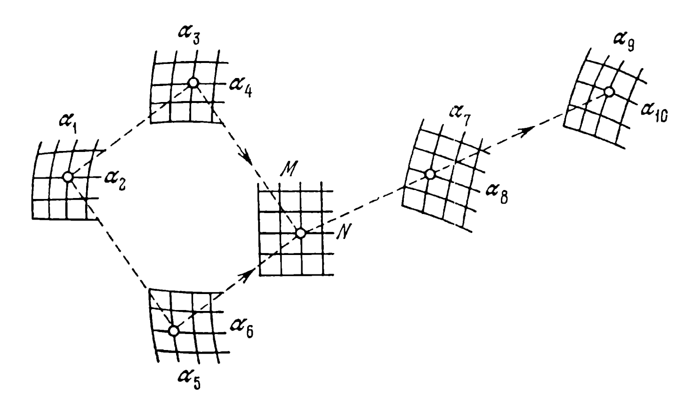


Fig. 275. Schéma d'un abaque composé pour l'équation $\frac{f_{78}-f_{56}-f_{34}+f_{12}}{g_{78}-g_{56}-g_{34}+g_{12}} = \frac{f_{9,\,10}-f_{56}-f_{34}+f_{12}}{g_{9,\,10}-g_{56}-g_{34}+g_{12}}$

variables. La droite qui passe par C et le symétrique de A par rapport à B coupe la ligne donnée α_7 en D. La cote de la ligne α_8 passant par D fait connaître α_8.

Abaques à points alignés et rhomboïdal. Supposons que la proposée puisse être décomposée par l'intermédiaire des variables auxiliaires M et N en un système de trois équations

$$\left.\begin{aligned} f_{12}-f_{56} &= f_{34}-M, \\ g_{12}-g_{56} &= g_{34}-N, \\ \frac{f_{78}-M}{g_{78}-N} &= \frac{f_{9,\,10}-M}{g_{9,\,10}-N}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.13)$$

Les deux premières équations se représentent par un abaque rhomboïdal, la troisième par un abaque à points alignés, tels que leurs champs (M, N) soient identiques. La superposition de ces deux abaques donne l'abaque composé de la figure 275. Le champ binaire (M, N) peut être retiré. L'élimination de M et N entre les équations du système (12.13) donne la relation à dix variables

$$\frac{f_{78}-f_{56}-f_{34}+f_{12}}{g_{78}-g_{56}-g_{34}+g_{12}} = \frac{f_{9,\,10}-f_{56}-f_{34}+f_{12}}{g_{9,\,10}-g_{56}-g_{34}+g_{12}}, \qquad (12.14)$$

représentée par l'abaque composé de la figure 275.

Abaques à points alignés et à points équidistants. Supposons que la proposée puisse être, par l'intermédiaire de la variable auxiliaire α, dissociée en deux équations de la forme

$$\left.\begin{aligned} f_{12} &= f_3 + \alpha, \\ \alpha &= f_4 f_{56} + g_{56}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.15)$$

La première équation se représente par un abaque à points équidistants, la seconde par un abaque à points alignés tels qu'ils aient l'échelle α en commun. L'abaque est représenté sur la figure 276. Il n'est pas obligatoire de graduer l'échelle attribuée à la variable auxiliaire α. L'élimination de α entre les équations du système (12.15) donne l'équation à six variables

$$f_{12} = f_3 + f_4 f_{56} + g_{56}, \qquad (12.16)$$

représentée par l'abaque composé de la figure 276. Les relations (6.58) et (6.61) à (6.66) sont susceptibles d'être représentées par des abaques composés à points alignés et à points équidistants si l'on convient que l'abaque de la figure 88 est un abaque simple à points équidistants.

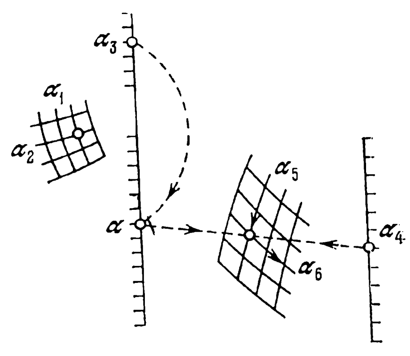


Fig. 276. Schéma d'un abaque composé pour l'équation $f_{12} = f_3 + f_4 f_{56} + g_{56}$

Abaques à points alignés et au compas. Supposons que la proposée puisse être, par l'intermédiaire de la variable auxiliaire α, décomposée en deux équations

$$\left.\begin{aligned} f_{12} + f_{13} &= f_4 + \alpha, \\ \alpha &= f_5 f_{67} + g_{67}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.17)$$

La première équation se représente par un abaque au compas, la deuxième par un abaque à points alignés, tels qu'ils aient l'échelle α en commun. On obtient ainsi l'abaque composé de la figure 277. Il n'est pas obligatoire de graduer l'échelle α. L'élimination de α entre les équations du système (12.17) donne la relation à sept variables

$$f_{12} + f_{13} = f_4 + f_5 f_{67} + g_{67}, \qquad (12.18)$$

représentée par l'abaque composé de la figure 277. Les abaques de ce type portent le nom d'*abaques à points alignés corrigés au compas.*

Abaques à points équidistants et au compas. Supposons que la proposée puisse être décomposée par l'intermédiaire de la variable auxi-

liaire α en deux équations

$$\left.\begin{aligned} f_{12} &= f_{34} + \alpha, \\ \alpha + f_{35} &= f_{67} + f_{68}, \end{aligned}\right\} \qquad (12.19)$$

représentables respectivement par un abaque à points équidistants et un abaque au compas, ayant les champs binaires (α_3, α) en com-

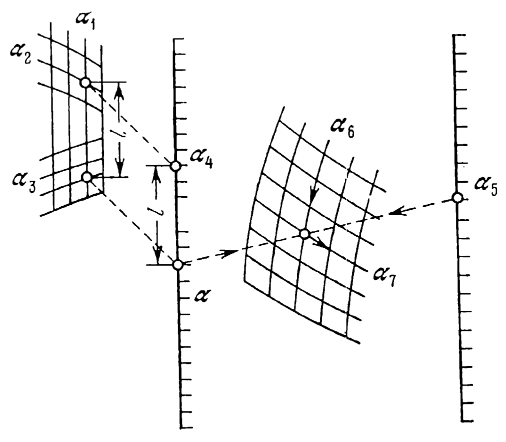


Fig. 277. Schéma d'un abaque composé pour l'équation $f_{12} + f_{13} = f_4 + f_5 f_{67} + g_{67}$

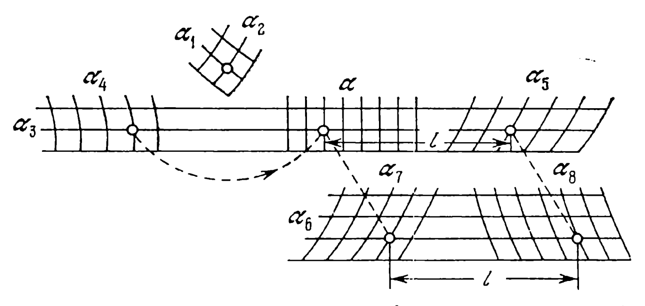


Fig. 278. Schéma d'un abaque composé pour l'équation $f_{12} = f_{34} - f_{35} + f_{67} + f_{68}$

mun. L'assemblage des deux abaques donne l'abaque composé de la figure 278. Il est possible de retirer la famille de lignes α. L'élimination de α entre les équations du système (12.19) nous conduit à l'équation à huit variables

$$f_{12} = f_{34} - f_{35} + f_{67} + f_{68}, \qquad (12.20)$$

représentée par l'abaque composé de la figure 278.

CHAPITRE 13

ABAQUES À TRANSPARENT

§ 13.1. Abaque à transparent général

Dans les chapitres précédents on a examiné au passage certains cas particuliers d'abaques aux éléments gradués, situés sur deux plans, tels les abaques des figures 41, 44, 215 et 217.

L'abaque le plus général sur deux plans est celui de la figure 279. Le *fond* (fig. 279, *a*) comprend n champs. Le *transparent* en contient autant (fig. 279, *b*). L'abaque représente le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} f_{2k-1,\,2k} &= f_{2k-1+2n,\,2k+2n}\cos\varphi - g_{2k-1+2n,\,2k+2n}\sin\varphi + a,\\ g_{2k-1,\,2k} &= f_{2k-1+2n,\,2k+2n}\sin\varphi + g_{2k-1+2n,\,2k+2n}\cos\varphi + b,\end{aligned}\right\} \qquad (13.1)$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

où a, b et φ sont des variables auxiliaires.

Dans le fond rapporté à un système de coordonnées xOy et dans le transparent rapporté à un système de coordonnées $x'O'y'$, les équations des champs s'écrivent:

champ $(\alpha_{2k-1},\ \alpha_{2k})$:

$$x_k = f_{2k-1,\,2k},\quad y_k = g_{2k-1,\,2k},\qquad (13.2)$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

champ $(\alpha_{2k-1+2n},\ \alpha_{2k+2n})$:

$$x'_{k+n} = f_{2k-1+2n,\,2k+2n},\quad y'_{k+n} = g_{2k-1+2n,\,2k+2n},\qquad (13.3)$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Le mode d'emploi de l'abaque est le suivant (cf. fig. 280). Soient donnés a, b, φ et toutes les variables dans les champs du fond. On demande les valeurs des variables impliquées dans les champs binaires du transparent. Repérons les points donnés M_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) dans les champs du fond. Appliquons le transparent sur le fond de telle sorte que l'origine des coordonnées O' du transparent coïncide avec le point du fond de coordonnées a et b et que les axes $O'x'$ et Ox fassent un angle φ. Les points M_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) viennent en coïncidence avec les points M'_{k+n} ($k = 1, 2, \ldots, n$) des champs du

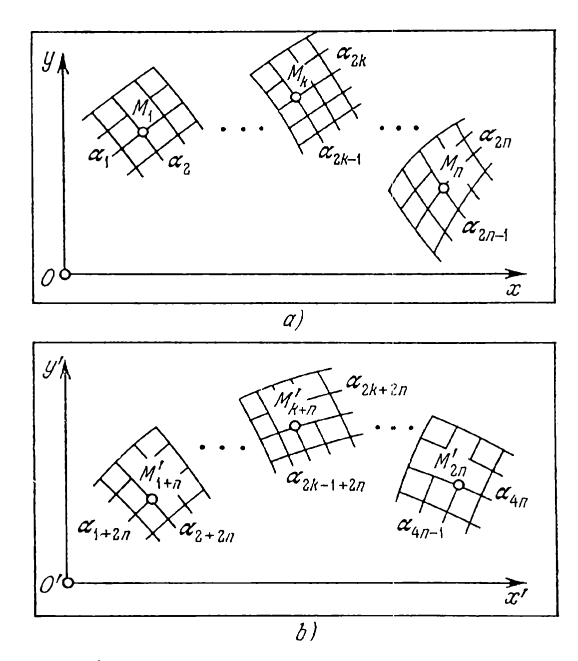


Fig. 279. Schéma d'un abaque à transparent général sur deux plans pour le système d'équations (13.1) (ainsi que pour les systèmes d'équations (13.12), (13.21) et (13.26)) : *a*) fond ; *b*) transparent

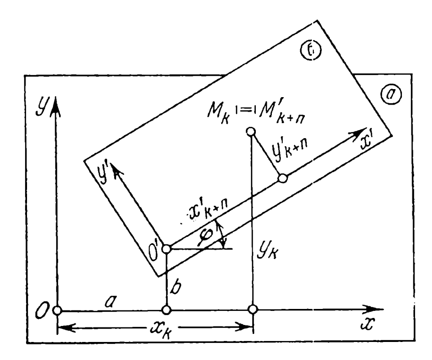


Fig. 280. Schéma d'application du transparent sur le fond dans l'abaque de la figure 279 lorsque sont données les variables *a*, *b* et φ : *a*) fond ; *b*) transparent

transparent en lesquels on lit $2n$ réponses. Donc l'abaque résout un système de $2n$ équations à $4n + 3$ variables.

Le mode d'emploi de l'abaque entraîne que les coordonnées x_k et y_k d'un point M_k sont liées aux coordonnées x'_{k+n} et y'_{k+n} d'un point M_{k+n} par les formules de transformation

$$x_k = x'_{k+n} \cos \varphi - y'_{k+n} \sin \varphi + a,$$
$$y_k = x'_{k+n} \sin \varphi + y'_{k+n} \cos \varphi + b,$$
$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

En portant dans ces formules les expressions (13.2) et (13.3) des coordonnées on obtient la forme canonique (13.1).

Si l'on élimine les variables auxiliaires a, b et φ, l'abaque résoudra un système de $2n-3$ équations à $4n$ variables.

Pour écrire les clefs des abaques à transparent, on utilise le symbole du *contact simple* $|-|$ qui exprime la coïncidence d'un point d'un plan avec une ligne d'un autre, le symbole du *contact double* $|=|$ qui exprime la coïncidence de deux points. Ces contacts sont dits *ponctuels* ou *d'ordre zéro*. Par ailleurs on se sert du symbole du *contact tangentiel* $|\smile|$ ou *contact d'ordre un* exprimant la tangence de deux lignes.

La clef de l'abaque à transparent utilisant le contact double s'écrit

$$M_k| = |M'_{k+n} \quad \text{ou} \quad (\alpha_{2k-1},\ \alpha_{2k})| = |(\alpha_{2k-1+2n},\ \alpha_{2k+2n}),$$

où $k = 1, 2, \ldots, n$. Les méthodes de résolution de divers problèmes résultent de cette clef.

Exemple 76. Etant données toutes les variables attribuées aux champs du fond et les variables α_{1+2n}, α_{2+2n} et α_{3+2n}, on demande les variables restantes.

Repérons dans les champs binaires les points M_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et appliquons le transparent sur le fond de sorte à réaliser les contacts

$$M_1| = |M'_{1+n}, \quad M_2| - |\alpha_{3+2n}.$$

Les points M_k positionnent alors les points M'_{k+n}, $k = 2, 3, \ldots, n$ en lesquels on lit la réponse.

Exemple 77. Etant données toutes les variables attribuées aux champs du fond et les variables α_{1+2n}, α_{3+2n} et α_{5+2n}, on demande les autres variables.

Repérons dans les champs binaires les points M_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Appliquons le transparent sur le fond de sorte à réaliser les contacts

$$M_1| - |\alpha_{1+2n}, \quad M_2| - |\alpha_{3+2n}, \quad M_3| - |\alpha_{5+2n}.$$

Les points M_k positionnent les points de résolution M'_{k+n} $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Pour déduire la forme canonique du système d'équations représenté par l'abaque de la figure 279, il faut éliminer les variables auxiliaires a, b et φ entre les équations du système (13.1).

Considérons une autre méthode de déduction de cette forme. Relions par des droites les points M_1 et M'_{1+n} respectivement aux points M_k et M'_{k+n}, où $k = 2, 3, \ldots, n$. On obtient $n - 1$ segments égaux

$$M_1M_k = M'_{1+n}M'_{k+n}.$$

Joignons les points M_2 et M'_{2+n} par des droites respectivement aux points M_k et M'_{k+n}, où $k = 3, 4, \ldots, n$. On obtient $n - 2$ segments égaux

$$M_2M_k = M'_{2+n}M'_{k+n}.$$

Les équations de ces segments s'écrivent

$$(x_k - x_1)^2 + (y_k - y_1)^2 = (x'_{k+n} - x'_{1+n})^2 + (y'_{k+n} - y'_{1+n})^2, \quad k = 2, 3, \ldots, n; \tag{13.4}$$

$$(x_k - x_2)^2 + (y_k - y_2)^2 = (x'_{k+n} - x'_{2+n})^2 + (y'_{k+n} - y'_{2+n})^2, \quad k = 3, 4, \ldots, n. \tag{13.5}$$

En portant dans les équations (13.4) et (13.5) les expressions (13.2) et (13.3) des coordonnées, on obtient le système d'équations cherché

$$(f_{2k-1,\,2k} - f_{12})^2 + (g_{2k-1,\,2k} - g_{12})^2 = (f_{2k-1+2n,\,2k+2n} - f_{1+2n,\,2+2n})^2 + (g_{2k-1+2n,\,2k+2n} - g_{1+2n,\,2+2n})^2, \quad k = 2, 3, \ldots, n; \tag{13.6}$$

$$(f_{2k-1,\,2k} - f_{34})^2 + (g_{2k-1,\,2k} - g_{34})^2 = (f_{2k-1+2n,\,2k+2n} - f_{3+2n,\,4+2n})^2 + (g_{2k-1+2n,\,2k+2n} - g_{3+2n,\,4+2n})^2, \quad k = 3, 4, \ldots, n. \tag{13.7}$$

Si dans l'abaque à transparent général, outre la coïncidence des points du fond et du transparent, on exige encore la tangence des lignes correspondantes en ces points, on obtient un abaque à contacts ponctuels et à contacts tangentiels. Cet abaque représentera le système d'équations composé des équations (13.6) et (13.7) et des équations qui traduisent les conditions de tangence des diverses lignes. L'abaque à transparent général présentera des contacts tangentiels dans le cas où les équations (13.6) et (13.7) possèdent des extrémums.

L'abaque à transparent général est très suggestif. Toute position du transparent sur le fond donne une vision d'ensemble des solutions du système. En faisant glisser le transparent on peut se faire une idée des variations des solutions du système et en étudier les extrémums si ceux-ci existent.

Le défaut de l'abaque à transparent général est la spécificité du système d'équations représenté et l'impossibilité de lui faire subir des transformations.

§ 13.2. Cas particuliers de l'abaque à transparent général

Les cas particuliers de l'abaque à transparent général sont le résultat d'une dégénérescence des champs binaires, d'une variation de leur nombre ou d'une égalisation à zéro de certains des paramètres a, b et φ.

Dégénérescence des champs binaires. La dégénérescence est le fait de champs isolés ou de groupes de champs.

Un champ dégénère:

1) en une échelle si l'une des variables du champ est fixée;

2) en un point si les deux variables du champ sont fixées;

3) en une famille de lignes si l'une des variables du champ est éliminée;

4) en une ligne constante si la variable définissant l'échelle est éliminée ou si la variable est fixée dans la famille de lignes.

La dégénérescence d'un groupe de champs binaires est susceptible de se traduire par la répétition d'une même variable. On distinguera les cas suivants:

1) la variable qui se répète est attribuée à des familles de lignes différentes dans les divers champs;

2) la variable qui se répète est attribuée dans tous les champs à une même famille de lignes;

3) la variable qui se répète est attribuée à une famille de droites parallèles ou de cercles concentriques;

4) la variable qui se répète est attribuée à une famille de lignes constante, i.e. n'est pas cotée, par exemple, est une famille de droites parallèles;

5) la variable qui se répète est attribuée à une famille de lignes qui dégénère en une ligne constante, par exemple, en une droite.

Dans le dernier cas, lorsque les champs du transparent dégénèrent en une droite constante présentant un contact avec les champs du fond, on obtient un abaque à points alignés général pour le système d'équations (3.11). Donc l'abaque à points alignés peut être considéré comme le cas le plus simple d'un abaque à transparent général.

Variation du nombre de champs binaires. Considérons les cas suivants:

1. Supposons $n = 1$ dans les équations (13.1). On obtient le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} f_{12} &= f_{34}\cos\varphi - g_{34}\sin\varphi + a, \\ g_{12} &= f_{34}\sin\varphi + g_{34}\cos\varphi + b. \end{aligned}\right\} \qquad (13.8)$$

On admettra que a, b et φ sont des variables indépendantes. L'abaque représentant le système d'équations (13.8) est tracé sur la figure 281. Cet abaque et ses cas particuliers sont utilisés pour la détermination des paramètres de formules empiriques, dans les problèmes d'interpolation ou d'approximation d'une fonction par une autre [29, 71].

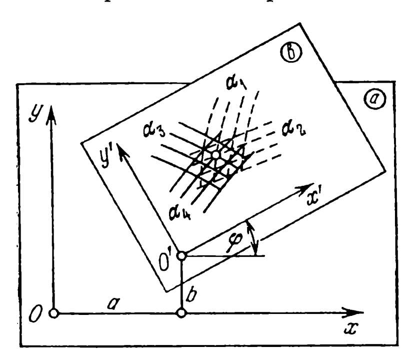


Fig. 281. Schéma d'un abaque à transparent à résolution totale pour le système d'équations (13.8): *a*) fond; *b*) transparent

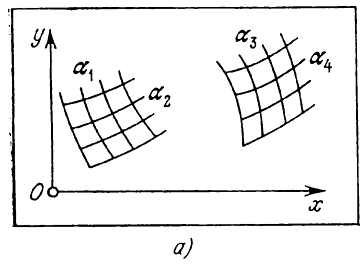
2. Posons $n = 2$ dans les équations (13.6). On obtient la forme

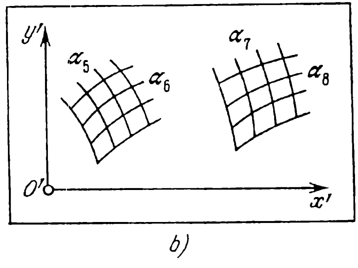
$$(f_{34} - f_{12})^2 + (g_{34} - g_{12})^2 = \\ = (f_{78} - f_{56})^2 + (g_{78} - g_{56})^2. \quad (13.9)$$

L'abaque de la forme (13.9) est représenté sur la figure 282. La clef est:

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mid = \mid (\alpha_5, \alpha_6),$$
$$(\alpha_3, \alpha_4) \mid = \mid (\alpha_7, \alpha_8).$$

Si l'on met en place tous les champs de cet abaque sur un même plan, on obtient l'abaque au compas général de la figure 271.





a) *b*)

Fig. 282. Schéma d'un abaque à transparent pour l'équation (13.9) (ainsi que pour les systèmes (13.13) et (13.28)): *a*) fond; *b*) transparent

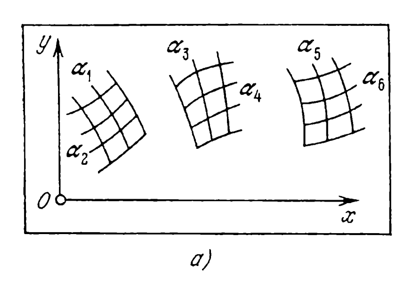
3. Faisons $n = 3$ dans les équations (13.6) et (13.7). On obtient la forme

$$\left.\begin{aligned} (f_{34} - f_{12})^2 + (g_{34} - g_{12})^2 &= (f_{9,\,10} - f_{78})^2 + (g_{9,\,10} - g_{78})^2, \\ (f_{56} - f_{12})^2 + (g_{56} - g_{12})^2 &= (f_{11,\,12} - f_{78})^2 + (g_{11,\,12} - g_{78})^2, \\ (f_{56} - f_{34})^2 + (g_{56} - g_{34})^2 &= (f_{11,\,12} - f_{9,\,10})^2 + (g_{11,\,12} - g_{9,\,10})^2. \end{aligned}\right\} \quad (13.10)$$

L'abaque correspondant est celui de la figure 283. La clef est:

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mid = \mid (\alpha_7, \alpha_8), \quad (\alpha_3, \alpha_4) \mid = \mid (\alpha_9, \alpha_{10}), \quad (\alpha_5, \alpha_6) \mid = \mid (\alpha_{11}, \alpha_{12}).$$

L'élimination entre les équations du système (13.10) de deux variables quelconques impliquées dans divers champs binaires (par exemple, α_{10} et α_{12}) nous conduit à une relation à dix variables, qu'il est



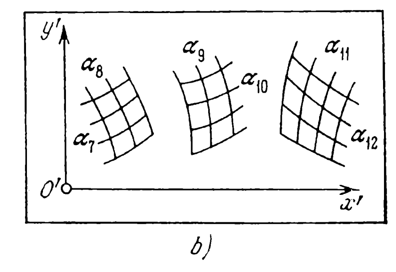


Fig. 283. Schéma d'un abaque à transparent pour le système d'équations (13.10) (ainsi que pour le système d'équations (13.30)): *a*) fond ; *b*) transparent

impossible d'expliciter. L'abaque correspondant est celui de la figure 283 si l'on y retire les familles de lignes attribuées aux variables éliminées. La clef est :

$$(\alpha_1,\ \alpha_2) \mid = \mid (\alpha_7,\ \alpha_8),\quad (\alpha_3,\ \alpha_4) \mid - \mid \alpha_9,\quad (\alpha_5,\ \alpha_6) \mid - \mid \alpha_{11}.$$

4. Posons $n = 4$ dans les équations (13.6) et (13.7). On obtient la forme

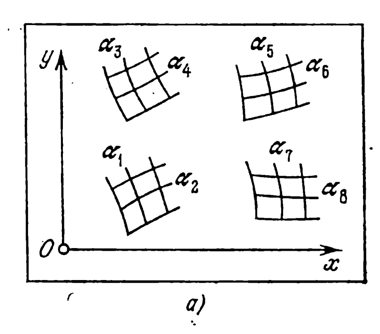
$$\left.\begin{aligned}
(f_{34}-f_{12})^2+(g_{34}-g_{12})^2&=(f_{11,\,12}-f_{9,\,10})^2+\\
&\quad+(g_{11,\,12}-g_{9,\,10})^2,\\
(f_{56}-f_{12})^2+(g_{56}-g_{12})^2&=(f_{13,\,14}-f_{9,\,10})^2+\\
&\quad+(g_{13,\,14}-g_{9,\,10})^2,\\
(f_{78}-f_{12})^2+(g_{78}-g_{12})^2&=(f_{15,\,16}-f_{9,\,10})^2+\\
&\quad+(g_{15,\,16}-g_{9,\,10})^2,\\
(f_{56}-f_{34})^2+(g_{56}-g_{34})^2&=(f_{13,\,14}-f_{11,\,12})^2+\\
&\quad+(g_{13,\,14}-g_{11,\,12})^2,\\
(f_{78}-f_{34})^2+(g_{78}-g_{34})^2&=(f_{15,\,16}-f_{11,\,12})^2+\\
&\quad+(g_{15,\,16}-g_{11,\,12})^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (13.11)$$

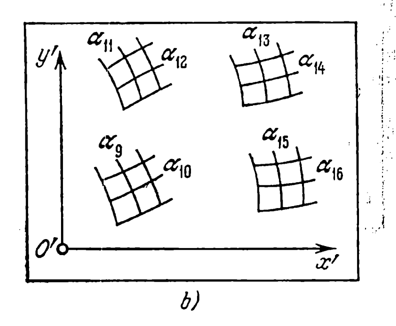
L'abaque est celui de la figure 284. La clef est :

$$(\alpha_1,\ \alpha_2) \mid = \mid (\alpha_9,\ \alpha_{10}),\quad (\alpha_3,\ \alpha_4) \mid = \mid (\alpha_{11},\ \alpha_{12}),$$
$$(\alpha_5,\ \alpha_6) \mid = \mid (\alpha_{13},\ \alpha_{14}),\quad (\alpha_7,\ \alpha_8) \mid = \mid (\alpha_{15},\ \alpha_{16}).$$

L'élimination entre les équations du système (13.11) de quatre variables à raison d'une par champ du transparent (par exemple, α_{10},

α_{12}, α_{14}, α_{16}), nous conduit à une relation à douze variables. C'est là dépendance la plus générale qui soit représentable par un abaque à transparent, sans répétition de variables, avec une seule applica-





a) b)

Fig. 284. Schéma d'un abaque à transparent pour le système d'équations (13.11): *a*) fond ; *b*) transparent

tion. On ne peut pas l'expliciter. L'abaque est celui de la figure 284 si l'on y retire les familles de lignes attribuées aux variables éliminées. La clef est :

$$(\alpha_1,\ \alpha_2)\ |-|\ \alpha_9,\quad (\alpha_3,\ \alpha_4)\ |-|\ \alpha_{11},$$
$$(\alpha_5,\ \alpha_6)\ |-|\ \alpha_{13},\quad (\alpha_7,\ \alpha_8)\ |-|\ \alpha_{15}.$$

Comme exemple d'abaque de ce type citons l'abaque à transparent en équerre de la figure 273.

Egalité à zéro des paramètres a, b et φ. Les paramètres a, b et φ caractérisent le degré de liberté du déplacement du transparent sur le fond. On distinguera les cas suivants:

1. $a = b = \varphi = 0$. Le transparent est fixe, i.e. possède zéro degré de liberté.
2. $a \neq 0$, $b = 0$, $\varphi = 0$. Le transparent possède un degré de liberté: une translation sur l'axe Ox.
3. $a = 0$, $b \neq 0$, $\varphi = 0$. Le transparent possède un degré de liberté se traduisant par une translation sur l'axe Oy.
4. $a = 0$, $b = 0$, $\varphi \neq 0$. Le transparent possède un degré de liberté se traduisant par une rotation autour des points confondus O et O'.
5. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\varphi = 0$. Le transparent possède deux degrés de liberté: deux translations. Le transparent est *orienté*. Cette translation conserve le parallélisme à la direction choisie.
6. $a \neq 0$, $b = 0$, $\varphi \neq 0$. Le transparent possède deux degrés de liberté: une translation sur Ox et une rotation.

7. $a = 0$, $b \neq 0$, $\varphi \neq 0$. Le transparent possède deux degrés de liberté : une translation sur Oy et une rotation.

Seuls les cas d'abaques à un degré de liberté du déplacement du transparent et d'abaques à transparent orienté présentent de l'intérêt dans les applications pratiques.

§ 13.3. Abaques à un degré de liberté du déplacement du transparent

Abaque à une translation du transparent. Arrêtons-nous sur le cas où $b = 0$ et $\varphi = 0$. La forme (13.1) s'écrit

$$\left.\begin{aligned} f_{2k-1,\,2k} &= f_{2k-1+2n,\,2k+2n} + a, \\ g_{2k-1,\,2k} &= g_{2k-1+2n,\,2k+2n}, \\ k &= 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \tag{13.12}$$

L'abaque est celui de la figure 279. La coïncidence des axes Ox et $O'x'$ sera désignée par le symbole du contact double. La clef s'écrit alors

$$Ox| = |O'x', \quad (\alpha_{2k-1},\ \alpha_{2k})| = |(\alpha_{2k-1+2n},\ \alpha_{2k+2n}), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Dans la suite on se limitera à l'examen du cas $n = 2$. Le système d'équations (13.12) s'écrit alors

$$\left.\begin{aligned} f_{12} &= f_{56} + a, \quad & f_{34} &= f_{78} + a, \\ g_{12} &= g_{56}, & g_{34} &= g_{78}. \end{aligned}\right\}$$

En éliminant le paramètre a entre les équations de ce système on obtient

$$\left.\begin{aligned} f_{12} - f_{56} &= f_{34} - f_{78}, \\ g_{12} &= g_{56}, \\ g_{34} &= g_{78}. \end{aligned}\right\} \tag{13.13}$$

Les équations des éléments de l'abaque se déduisent des formules (13.2) et (13.3) pour $n = 2$. Il est commode de les consigner dans le tableau 47. L'abaque est celui de la figure 282. La clef est :

$$Ox| = |O'x', \quad (\alpha_1,\ \alpha_2)| = |(\alpha_5,\ \alpha_6), \quad (\alpha_3,\ \alpha_4)| = |(\alpha_7,\ \alpha_8).$$

Tableau 47

Fond			Transparent		
Coordonnées	Champ $(\alpha_1,\ \alpha_2)$	Champ $(\alpha_3,\ \alpha_4)$	Coordonnées	Champ $(\alpha_5,\ \alpha_6)$	Champ $(\alpha_7,\ \alpha_8)$
x	f_{12}	f_{34}	x'	f_{56}	f_{78}
y	g_{12}	g_{34}	y'	g_{56}	g_{78}

Introduisons dans les équations des éléments de l'abaque des paramètres de transformation et des fonctions arbitraires. Mettons les deux dernières équations du système (13.13) sous la forme

$$Q\,(g_{12}) = Q\,(g_{56}), \qquad (13.14)$$

$$T\,(g_{12}) = T\,(g_{56}), \qquad (13.15)$$

$$P\,(g_{34}) = P\,(g_{78}), \qquad (13.16)$$

$$R\,(g_{34}) = R\,(g_{78}), \qquad (13.17)$$

où Q, T, P et R sont des fonctions arbitraires. Eu égard à la première équation du système (13.13) et aux équations (13.14) et (13.17), il vient

$$[f_{12} + Q\,(g_{12})] - [f_{56} + Q\,(g_{56})] = [f_{34} + R\,(g_{34})] - [f_{78} + R\,(g_{78})]. \qquad (13.18)$$

Ramenons les équations (13.18), (13.15) et (13.16) à la forme

$$\{a_0 + \mu_x [f_{12} + Q\,(g_{12})]\} - \{a_0' + \mu_x [f_{56} + Q\,(g_{56})]\} =$$
$$= \{a_0 + a + \mu_x [f_{34} + R\,(g_{34})]\} - \{a_0' + a + \mu_x [f_{78} + R\,(g_{78})]\},$$
$$b_0 + \mu_y' T\,(g_{12}) = b_0 + \mu_y' T\,(g_{56}),$$
$$b_0' + \mu_y'' P\,(g_{34}) = b_0' + \mu_y'' P\,(g_{78}),$$

où a_0, a, a_0', b_0, b_0', μ_x, μ_y' et μ_y'' sont des paramètres de transformation. Les équations obtenues s'apparentent de nouveau au système (13.13). Les nouvelles équations des éléments de l'abaque sont consignées dans le tableau 48.

Tableau 48

Fond		
Coordonnées	Champ (α_1, α_2)	Champ (α_3, α_4)
x	$a_0 + \mu_x [f_{12} + Q\,(g_{12})]$	$a_0 + a + \mu_x [f_{34} + R\,(g_{34})]$
y	$b_0 + \mu_y' T\,(g_{12})$	$b_0' + \mu_y'' P\,(g_{34})$
Transparent		
Coordonnées	Champ (α_5, α_6)	Champ (α_7, α_8)
x'	$a_0' + \mu_x [f_{56} + Q\,(g_{56})]$	$a_0' + a + \mu_x [f_{78} + R\,(g_{78})]$
y'	$b_0 + \mu_y' T\,(g_{56})$	$b_0' + \mu_y'' P\,(g_{78})$

En éliminant les variables α_6 et α_8 entre les équations du système (13.13) et en désignant α_7 par α_6, on obtient la forme à six

variables

$$f_{12} + F_5(g_{12}, \alpha_5) = f_{34} + F_6(g_{34}, \alpha_6) \tag{13.19}$$

dont l'abaque est représenté sur la figure 285. La clef est:

$$Ox| = |O'x', \quad (\alpha_1, \alpha_2)| - |\alpha_5, \quad (\alpha_3, \alpha_4)| - |\alpha_6.$$

La relation

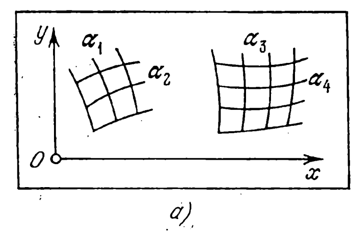
$$f_{12} + f_{15} = f_{34} + f_{36} \tag{13.20}$$

est un cas particulier de la forme (13.19). Elle s'apparente à la relation (8.25)

$$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46},$$

qui a été représentée par une autre méthode par un abaque du type de la figure 217 (cf. § 8.6).

Dans le but de tracer les abaques des relations (13.19) et (13.20) ramenons-les à la forme du système (13.13) par l'intermédiaire des



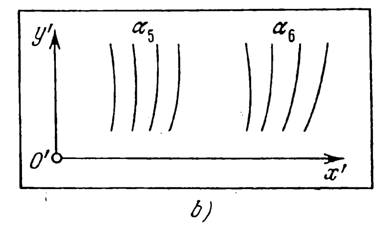


Fig. 285. Schéma d'un abaque à une translation du transparent pour l'équation (13.19): *a*) fond; *b*) transparent

variables auxiliaires β et γ. On obtient les deux systèmes suivants

$$\left.\begin{aligned} f_{12} - [-F_5(\beta, \alpha_5)] &= f_{34} - [-F_6(\gamma, \alpha_6)], \\ g_{12} &= \beta, \\ g_{34} &= \gamma \end{aligned}\right\}$$

et

$$\left.\begin{aligned} f_{12} - [-f_{15}(\beta, \alpha_5)] &= f_{34} - [-f_{34}(\gamma, \alpha_6)], \\ \alpha_1 &= \beta, \\ \alpha_3 &= \gamma, \end{aligned}\right\}$$

d'où l'on déduit les équations des éléments de l'abaque. Ecrivons ensuite les équations impliquant les paramètres de transformation et les fonctions arbitraires en portant dans le tableau 48 les expressions respectives des fonctions tirées des équations.

Comme exemples d'abaques concrets à une translation du transparent, citons les abaques des figures 41 et 44.

L'abaque de la figure 282, construit pour le système d'équations (13.13), est susceptible d'être transformé en un abaque au compas. A cet effet, il faut appliquer le transparent sur le fond de façon arbitraire en respectant la condition $Ox| = |O'x'$ et le fixer. Ensuite il faut mettre en place la famille de directrices horizontales sur le dessin obtenu. Les points M_1 et M'_3, M_2 et M'_4 qui étaient précé-

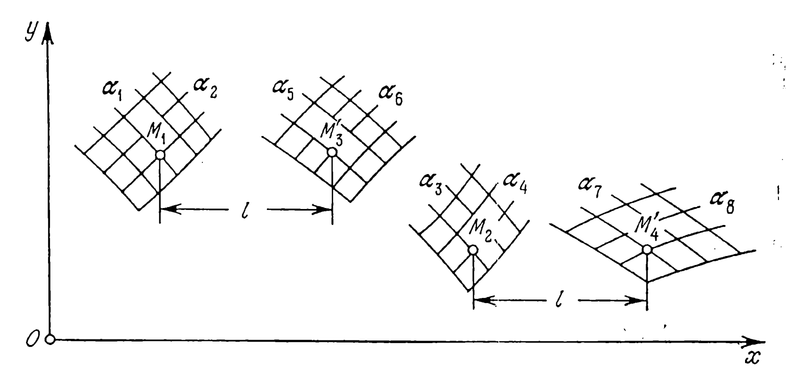


Fig. 286. Transformation d'un abaque à une translation du transparent pour le système d'équations (13.13) de la figure 282 en un abaque au compas

demment en un contact double se déplacent horizontalement d'une distance l qui définit l'écartement résolvant du compas. L'abaque est représenté sur la figure 286. La forme (13.19) peut être représentée par un abaque analogue.

Abaque à une rotation du transparent. En faisant $a = b = 0$ dans la forme (13.1), on obtient

$$\left.\begin{aligned} f_{2k-1,\,2k} &= f_{2k-1+2n,\,2k+2n} \cos\varphi - g_{2k-1+2n,\,2k+2n} \sin\varphi, \\ g_{2k-1,\,2k} &= f_{2k-1+2n,\,2k+2n} \sin\varphi + g_{2k-1+2n,\,2k+2n} \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (13.21)$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

qui est représentée par l'abaque de la figure 279. La clef est:

$$O| = |O', \quad (\alpha_{2k-1},\ \alpha_{2k})| = |(\alpha_{2k-1+2n},\ \alpha_{2k+2n}), \quad [k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Considérons le cas particulier du système (13.21) correspondant à $n = 2$:

$$\left.\begin{aligned} f_{12} &= f_{56} \cos\varphi - g_{56} \sin\varphi, \\ g_{12} &= f_{56} \sin\varphi + g_{56} \cos\varphi, \\ f_{34} &= f_{78} \cos\varphi - g_{78} \sin\varphi, \\ g_{34} &= f_{78} \sin\varphi + g_{78} \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (13.22)$$

L'élimination du paramètre φ entre les équations du système (13.22) nous conduit à un système du type (13.13)

$$\left.\begin{aligned} F_{12}-F_{56}&=F_{34}-F_{78},\\ G_{12}&=G_{56},\\ G_{34}&=G_{78},\end{aligned}\right\} \qquad (13.23)$$

où

$$F_i=\operatorname{arctg}\frac{g_i}{f_i},\quad G_i=\sqrt{f_i^2+g_i^2}, \qquad (13.24)$$
$$i=12,\ 34,\ 56,\ 78.$$

Les équations (13.24) entraînent

$$f_i=G_i\cos F_i,\quad g_i=G_i\sin F_i, \qquad (13.25)$$
$$i=12,\ 34,\ 56,\ 78.$$

Les équations des champs de l'abaque représentatif du système d'équations (13.23) se déduisent à partir du tableau 47 si l'on substitue à la fonction f_i et g_i, $i=12$, 34, 56, 78 son expression (13.25). On peut préalablement introduire dans la fonction F_i, G_i des paramètres de transformation et des fonctions arbitraires tels que dans la fonction f_i, g_i du système d'équations (13.13) (cf. tableau 48). Avant et après introduction des paramètres de transformation et des fonctions arbitraires les équations des champs (α_1, α_2) s'écrivent respectivement

$$x=G_{12}\cos F_{12},$$
$$y=G_{12}\sin F_{12}$$

et

$$x=[b_0+\mu_y' T(G_{12})]\cos[a_0+\mu_x(F_{12}+Q(G_{12}))],$$
$$y=[b_0+\mu_y' T(G_{12})]\sin[a_0+\mu_x(F_{12}+Q(G_{12}))].$$

Les points fixes O et O' coïncident avec l'origine des coordonnées du fond et du transparent.

Les formes (13.13) et (13.23) étant similaires, on n'étudiera que l'une d'elles, par exemple la forme (13.13). Donc la forme (13.13) et ses cas particuliers, les formes (13.19) et (13.20), se représentent par les deux types d'abaques à un degré de liberté du déplacement du transparent.

§ 13.4. Abaques à transparent orienté

En posant $\varphi=0$ dans le système d'équations (13.1), on obtient

$$\left.\begin{aligned} f_{2k-1,\,2k}&=f_{2k-1+2n,\,2k+2n}+a,\\ g_{2k-1,\,2k}&=f_{2k-1+2n,\,2k+2n}+b,\\ k&=1,\ 2,\ \ldots,\ n.\end{aligned}\right\} \qquad (13.26)$$

Explicitons a et b pour $k = 1$, puis portons-les dans le système initial

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} - f_{1+2n,\ 2+2n} = f_{2k-1,\ 2k} - f_{2k-1+2n,\ 2k+2n}, \\ g_{12} - g_{1+2n,\ 2+2n} = g_{2k-1,\ 2k} - g_{2k-1+2n,\ 2k+2n}, \end{array}\right\} \qquad (13.27)$$
$$k = 2, \ldots, n.$$

L'abaque correspondant est tracé sur la figure 279. La clef est:

$$Ox \parallel O'x', \quad (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})| = |(\alpha_{2k-1+2n}, \alpha_{2k+2n}),$$
$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

En faisant $n = 2$ dans le système (13.27), on obtient la forme

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} - f_{56} = f_{34} - f_{78}, \\ g_{12} - g_{56} = g_{34} - g_{78}, \end{array}\right\} \qquad (13.28)$$

qui a été représentée par un abaque rhomboïdal et un abaque barycentrique en chaîne (cf. § 11.5). L'abaque à transparent orienté représentant la forme (13.28) est dessiné sur la figure 282. La clef est:

$$Ox \parallel O'x', \quad (\alpha_1, \alpha_2)| = |(\alpha_5, \alpha_6), \quad (\alpha_3, \alpha_4)| = |(\alpha_7, \alpha_8).$$

Pour transformer cet abaque en un abaque rhomboïdal il faut dessiner le transparent et le fond sur une même feuille en respectant le parallélisme des axes Ox et $O'x'$.

En éliminant la variable α_8 entre les équations du système (13.28) et en inversant les signes des fonctions f_{12} et g_{12} on obtient la forme à sept variables

$$f_7 = F(f_{12} + f_{34} + f_{56}, \quad g_{12} + g_{34} + g_{56}), \qquad (13.29)$$

qui est représentée par l'abaque de la figure 282 si l'on y retire la famille de lignes attribuées à la variable éliminée α_8. La clef est:

$$Ox \parallel O'x', \quad (\alpha_1, \alpha_2)| = |(\alpha_5, \alpha_6), \quad (\alpha_3, \alpha_4)| - |\alpha_7.$$

Cet abaque peut également être transformé en un abaque rhomboïdal.

L'avantage des abaques à transparent orienté représentatifs des équations (13.28) et (13.29) sur les abaques rhomboïdaux représentant les mêmes équations est dans le fait qu'ils ne privilégient pas certains problèmes et dans la suggestivité inhérente à leur genre. On les préférera donc souvent aux abaques rhomboïdaux lorsqu'il s'agira de représenter les relations indiquées.

En posant $n = 3$ dans le système d'équations (13.27), on obtient la forme

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} - f_{78} = f_{34} - f_{9,\ 10} = f_{56} - f_{11,\ 12}, \\ g_{12} - g_{78} = g_{34} - g_{9,\ 10} = g_{56} - g_{11,\ 12} \end{array}\right\} \qquad (13.30)$$

qui se représente par l'abaque de la figure 283. La clef est:

$$Ox \parallel O'x', \ (\alpha_1, \alpha_2) \mid = \mid (\alpha_7, \alpha_8), \ (\alpha_3, \alpha_4) \mid = \mid (\alpha_9, \alpha_{10}), \ (\alpha_5, \alpha_6) \mid = \mid$$
$$\mid = \mid (\alpha_{11}, \alpha_{12}).$$

L'élimination des variables α_8, α_{10} et α_{12} entre les équations du système (13.30) nous conduit à une relation à neuf variables. L'abaque correspondant est celui de la figure 283 sans les familles de lignes attribuées aux variables éliminées. La clef est:

$$Ox \parallel O'x', \ (\alpha_1, \alpha_2) \mid - \mid \alpha_7, \ (\alpha_3, \alpha_4) \mid - \mid \alpha_9, \ (\alpha_5, \alpha_6) \mid - \mid \alpha_{11}.$$

Cette relation est inexplicitable. L'important c'est que parmi les relations particulières à neuf variables, représentables par des abaques de ce type, il est toute une série de formes canoniques d'un grand intérêt [29], telle la forme

$$f_{12} + f_{34} + f_{56} = f_7 + f_8 + f_9 \qquad (13.31)$$

qui se déduit par élimination des variables auxiliaires β, γ et δ entre les équations du système

$$\left. \begin{array}{r} T_{12} - \beta = T_{34} - \gamma = f_{56} - f_9, \\ (f_{12} + T_{12}) - (f_7 + \beta) = -f_{34} - (-f_8) = T_{56} - \delta, \end{array} \right\}$$

qui est un cas particulier du système (13.30), où T_{12}, T_{34} et T_{56} sont des fonctions arbitraires.

Signalons les cas particuliers suivants des formes canoniques (13.28) et (13.30) qui sont importants dans les applications:

$$\left. \begin{array}{l} f_{12} - f_5 = f_{34} - f_6, \\ g_{12} - g_5 = g_{34} - g_6; \end{array} \right\} \qquad (13.32)$$

$$\left. \begin{array}{l} f_{12} - f_7 = f_{34} - f_8 = f_{56} - f_9, \\ g_{12} - g_7 = g_{34} - g_8 = g_{56} - g_9. \end{array} \right\} \qquad (13.33)$$

Dans les abaques des relations (13.32) et (13.33), le transparent ne porte que les échelles, on pourra donc l'exécuter avec le même papier opaque que le fond par exemple. De tels abaques sont dits *abaques à plan mobile orienté opaque.*

§ 13.5. Méthode de construction d'abaques à transparent orienté

Voyons d'abord comment construire l'abaque de la forme (13.28). Les équations de ses éléments se déterminent à partir des relations (13.2) et (13.3) pour $n = 2$. Il est plus commode de les inscrire dans le tableau 47. On peut se servir de la forme d'écriture plus concise

$$\begin{array}{c|c|c|} x & f_{12} & f_{34} \\ \hline y & g_{12} & g_{34} \end{array}\ , \qquad \begin{array}{c|c|c|} x' & f_{56} & f_{78} \\ \hline y' & g_{56} & g_{78} \end{array}\ .$$

Portons les paramètres de transformation a_0, b_0, a'_0, b'_0, a, b, μ_x, μ_y, δ_x et δ_y dans les équations des éléments de l'abaque de la relation (13.28). A cet effet, ajoutons la première équation (13.28) au produit de la seconde par δ_x, puis multiplions le résultat par μ_x et additionnons à l'identité

$$a_0 - a'_0 = (a_0 + a) - (a'_0 - a).$$

On obtient la première équation qui fait intervenir les paramètres de transformation

$$[a_0 + \mu_x (f_{12} + \delta_x g_{12})] - [a'_0 + \mu_x (f_{56} + \delta_x g_{56})] =$$
$$= [a_0 + a + \mu_x (f_{34} + \delta_x g_{34})] - [a'_0 + a + \mu_x (f_{78} + \delta_x g_{78})].$$

De façon analogue on obtient la deuxième équation avec les paramètres de transformation

$$[b_0 + \mu_y (\delta_y f_{12} + g_{12})] - [b'_0 + \mu_y (\delta_y f_{56} + g_{56})] =$$
$$= [b_0 + b + \mu_y (\delta_y f_{34} + g_{34})] - [b'_0 + b + \mu_y (\delta_y f_{78} + g_{78})].$$

Ces deux équations s'apparentent aux équations initiales. De là on déduit les nouvelles équations des éléments de l'abaque. Elles sont consignées dans le tableau 49.

Tableau 49

Fond		
Coordonnées	Champ (α_1, α_2)	Champ (α_3, α_4)
x	$a_0+\mu_x (f_{12}+\delta_x g_{12})$	$a_0+a+\mu_x (f_{34}+\delta_x g_{34})$
y	$b_0+\mu_y (\delta_y f_{12}+g_{12})$	$b_0+b+\mu_y (\delta_y f_{34}+g_{34})$
Transparent		
Coordonnées	Champ (α_5, α_6)	Champ (α_7, α_8)
x'	$a'_0+\mu_x (f_{56}+\delta_x g_{56})$	$a'_0+a+\mu_x (f_{78}+\delta_x g_{78})$
y'	$b'_0+\mu_y (\delta_y f_{56}+g_{56})$	$b'_0+b+\mu_y (\delta_y f_{78}+g_{78})$

Les paramètres a_0 et b_0, a'_0 et b'_0 positionnent les systèmes de coordonnées sur le fond et sur le transparent. Les paramètres μ_x et μ_y permettent de modifier les dimensions des éléments de l'abaque dans le sens des axes de coordonnées. Les paramètres δ_x et δ_y définissent une translation dans le sens des axes de coordonnées. Les paramètres a et b permettent de mieux disposer les champs binaires sur le fond et le transparent.

La méthode de construction de l'abaque de la forme (13.28) se ramène au suivant. Transcrire les équations des éléments de l'abaque et procéder à leur analyse. Parfois il y aura intérêt à transformer identiquement le système d'équations initial par introduction de paramètres appropriés δ_x et δ_y. Les équations des éléments de l'abaque s'écriront alors

x	$f_{12}+\delta_x g_{12}$	$f_{34}+\delta_x g_{34}$
y	$\delta_y f_{12}+g_{12}$	$\delta_y f_{34}+g_{34}$

,

x'	$f_{56}+\delta_x g_{56}$	$f_{78}+\delta_x g_{78}$
y'	$\delta_y f_{56}+g_{56}$	$\delta_y f_{78}+g_{78}$

.

Se donner ensuite les valeurs des paramètres μ_x et μ_y et tracer sur des feuilles différentes les esquisses des quatre champs binaires. Ainsi le champ (α_1, α_2) est mis en place par les équations

$$x = \mu_x (f_{12} + \delta_x g_{12}), \quad y = \mu_y (\delta_y f_{12} + g_{12}).$$

Les valeurs des paramètres μ_x et μ_y sont à choisir telles que les champs soient de dimensions convenables.

Reste maintenant à trouver une disposition commode aux champs. Prendre à cet effet une collection quelconque de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$, vérifiant le système d'équations (13.28), repérer les points des champs binaires correspondant à ces valeurs: le point M_1 dans le champ (α_1, α_2), le point M_2 dans le champ (α_3, α_4), le point M_3' dans le champ (α_5, α_6), le point M_4' dans le champ (α_7, α_8). Superposer ensuite les champs de telle sorte que soient réalisés les contacts

$$M_1| = |M_3', \quad M_2| = |M_4'$$

et que les axes des coordonnées soient parallèles. Epingler ensuite les feuilles. Déplacer les feuilles épinglées en respectant le parallélisme des axes de coordonnées pour déterminer la disposition convenable des champs. Reste maintenant à rapporter le fond et le transparent à un système de coordonnées et à calculer les valeurs a_0, b_0, a_0', b_0', a et b correspondantes. Mettre en place l'abaque. Préciser définitivement les valeurs des paramètres et mettre l'abaque au net.

Les équations des éléments de l'abaque représentant la forme (13.30) se déduisent des relations (13.2) et (13.3) pour $n = 3$. Il est commode d'utiliser la forme d'écriture plus concise

x	f_{12}	f_{34}	f_{56}
y	g_{12}	g_{34}	g_{56}

,

x'	f_{78}	$f_{9,10}$	$f_{11,12}$
y'	g_{78}	$g_{9,10}$	$g_{11,12}$

.

Les équations des éléments de l'abaque après introduction des paramètres de transformation sont inscrites dans le tableau 50.

La forme (13.30) se représente comme la forme (13.28).

De ce qui précède il suit que les abaques à transparent orienté peuvent représenter non seulement des systèmes d'équations, mais

Tableau 50

Fond			
Coordonnées	Champ (α_1, α_2)	Champ (α_3, α_4)	Champ (α_5, α_6)
x	$a_0+\mu_x(f_{12}+\delta_x g_{12})$	$a_0+a+\mu_x(f_{34}+\delta_x g_{34})$	$a_0+c+\mu_x(f_{56}+\delta_x g_{56})$
y	$b_0+\mu_y(\delta_y f_{12}+g_{12})$	$b_0+b+\mu_y(\delta_y f_{34}+g_{34})$	$b_0+d+\mu_y(\delta_y f_{56}+g_{56})$
Transparent			
Coordonnées	Champ (α_7, α_8)	Champ (α_9, α_{10})	Champ (α_{11}, α_{12})
x'	$a_0'+\mu_x(f_{78}+\delta_x g_{78})$	$a_0'+a+\mu_x(f_{9,10}+\delta_x g_{9,10})$	$a_0'+c+\mu_x(f_{11,12}+\delta_x g_{11,12})$
y'	$b_0'+\mu_y(\delta_y f_{78}+g_{78})$	$b_0'+b+\mu_y(\delta_y f_{9,10}+g_{9,10})$	$b_0'+d+\mu_y(\delta_y f_{11,12}+g_{11,12})$

des équations faisant intervenir jusqu'à neuf variables. Les relations contenant jusqu'à six variables sont réduites, si possible, par l'intermédiaire de variables auxiliaires et parfois de fonctions arbitraires à la forme (13.28) ou (13.30), les relations à sept, huit et neuf variables respectivement à la forme (13.30).

Si l'on applique la méthode de répétition des variables auxiliaires développée dans les travaux [72, 73] on peut représenter par un abaque des relations faisant intervenir un plus grand nombre de variables. La réponse sera comme précédemment donnée par une application du transparent sur le fond.

Les abaques à transparent orienté représentatifs de relations à plusieurs variables complexes [74-77] présentent un intérêt évident.

Plus bas sont traités des exemples types d'abaques à transparent orienté représentant des relations et des systèmes d'équations. On peut trouver des abaques à transparent orienté dans les travaux [10, 32-34, 37-39, 41 .

Exemple 78. Soit à déterminer d'après des données empiriques les paramètres A et B de la formule empirique [78]

$$v = A\,(e^{Bt} - 1), \tag{13.34}$$

qui donne le volume v de gaz dégagé dans le temps t dans la fermentation méthanique. Ce problème peut être résolu par un abaque à transparent orienté. Prenons les intervalles suivants de variation des variables: $1 \leqslant A \leqslant 100$; $0{,}05 \leqslant B \leqslant 0{,}30$; $2 \leqslant t \leqslant 20$ jours; $1 \leqslant v \leqslant 500$ ml.

Ramenons la relation (13.34) à la première équation du système (13.28)

$$0 - \log A = \log (e^{Bt} - 1) - \log v.$$

Pour deuxième équation du même système, prenons l'identité

$$B - 0 = B - 0.$$

On a

$$f_{12} = 0, \quad g_{12} = B, \quad f_{34} = \log (e^{Bt} - 1), \quad g_{34} = B,$$
$$f_{56} = \log A, \quad g_{56} = 0, \quad f_{78} = \log v, \quad g_{78} = 0.$$

L'abaque mis en place par les équations du tableau 49 pour $a_0 = a'_0 = b'_0 = a = b = 0$, $b_0 = -25$ mm, $\mu_x = 75$mm, $\mu_y = 500$ mm,

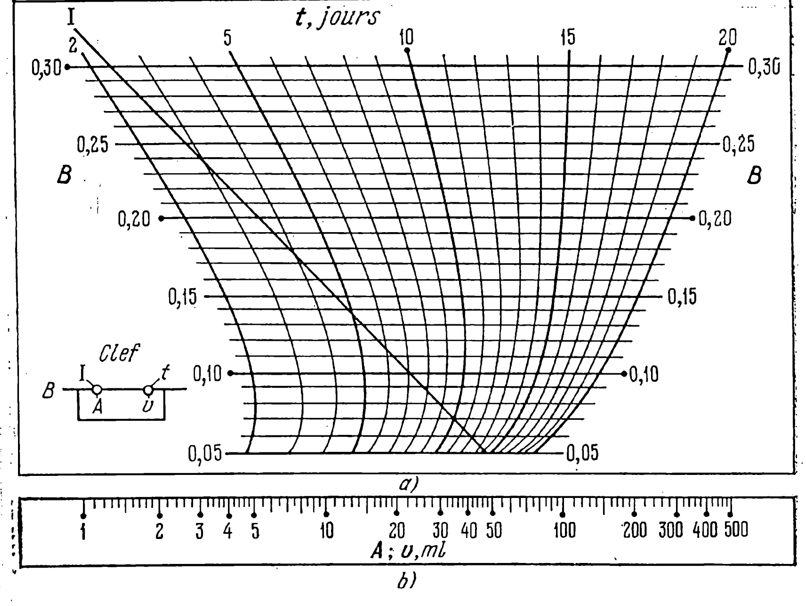


Fig. 287. Abaque à transparent orienté pour la formule (13.24) : *a*) fond ; *b*) transparent

$\delta_x = -6{,}3$, $\delta_y = 0$ est tracé sur la figure 287. Désignons par I le support de l'échelle B. La clef est : le support des échelles confondues A et v vient en coïncidence avec la droite donnée B, i.e. I| —|A, t| — |v.

La clef de l'abaque suggère de choisir les paramètres A et B correspondant aux données empiriques t_1 et v_1, t_2 et v_2, . . ., t_n et v_n de la manière suivante. Faisons glisser le transparent orienté sur le

ond et amenons-le à occuper une position telle que les contacts $_1| - |v_1, t_2| - |v_2, \ldots, t_n| - |v_n$ soient le mieux réalisés à vue. La cote de la droite B coïncidant avec le bord supérieur du transparent fait connaître le point B, la cote de l'échelle A à son point d'intersection avec la droite I fait connaître la réponse A. En se servant de l'abaque de la figure 287 et des données empiriques du tableau 51 on trouve $A = 2{,}5$ et $B = 0{,}164$. La formule (13.34) s'écrit

$$v = 2{,}5\,(e^{0{,}164t} - 1).$$

Tableau 51

t, en jours	5	7	8	9	10	12	13	15	16
v, en ml	3,1	5,1	6,7	8,5	10,7	14,9	18,6	26,6	30,3

A remarquer que l'équation (13.34) peut être représentée par des abaques de divers types. Mais seul l'abaque à transparent orienté permet de résoudre le problème du choix des paramètres des formules empiriques. Les méthodes nomographiques de détermination des paramètres des formules empiriques à l'aide d'abaques à transparent sont développées dans les travaux [29, 71, 79-81].

Exemple 79. Construisons l'abaque à transparent orienté de la relation

$$w = u + v + \frac{A}{u} + \frac{B}{v} + \frac{C}{uv} \tag{13.35}$$

et appliquons-le à la recherche des extrémums de cette dernière sur les intervalles suivants: $0{,}5 \leqslant u \leqslant 4$; $0{,}5 \leqslant v \leqslant 4$; $1 \leqslant A \leqslant 5$; $1 \leqslant B \leqslant 5$; $0{,}5 \leqslant C \leqslant 2$; $5 \leqslant w \leqslant 10$.

Dans l'équation (13.35) posons

$$\left.\begin{aligned} M &= u\frac{A}{u} + v + \frac{B}{v}, \\ N &= \frac{C}{uv}, \end{aligned}\right\} \tag{13.36}$$

où M et N sont des variables auxiliaires. L'équation (13.35) s'écrit alors

$$w = M + N. \tag{13.37}$$

Ramenons l'équation (13.36) à la forme (13.28)

$$\left.\begin{aligned} \left(u + \frac{A}{u}\right) - M &= \left(-v - \frac{B}{v}\right) - 0, \\ \log u - (-\log N) &= -\log v - (-\log C). \end{aligned}\right\}$$

On a

$$f_{12} = u + \frac{A}{u}, \quad g_{12} = \log u, \quad f_{34} = -v - \frac{B}{v}, \quad g_{34} = -\log v,$$

$$f_{56} = M, \quad g_{56} = -\log N, \quad f_{78} = 0, \quad g_{78} = -\log C.$$

L'abaque mis en place par les équations du tableau 49 pour $a_0 = b_0 = a'_0 = b'_0 = 0$, $a = 145$ mm, $b = 15{,}05$ mm, $\mu_x = 10$ mm,

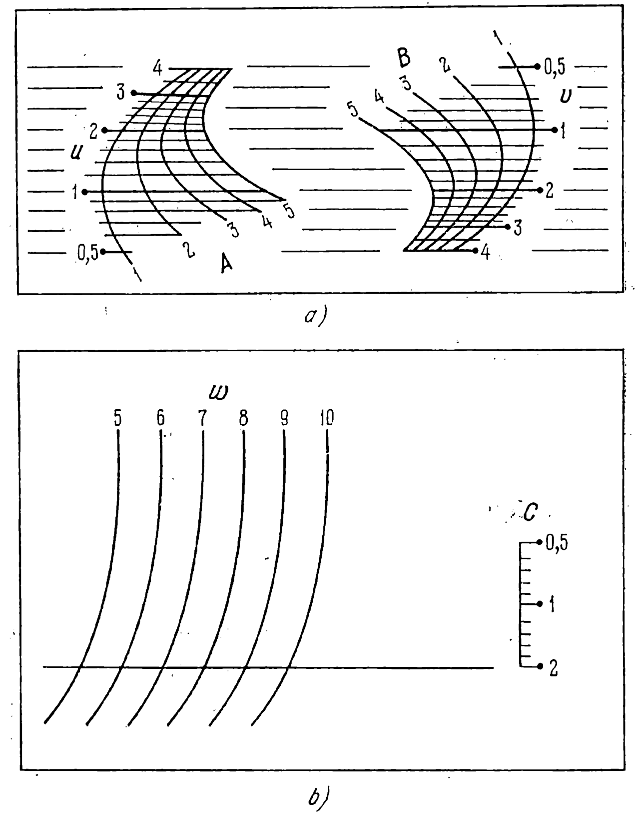


Fig. 288. Abaque à transparent orienté pour la formule (13.35) : *a*) fond ; *b*) transparent

$\mu_y = 50$ mm, $\delta_x = \delta_y = 0$ est tracé sur la figure 288. La famille de lignes w a été mise en place sur le champ (M, N) par l'équation (13.37). Pour guider le transparent sur le fond on a tracé une famille de droites sur ce dernier et une droite sur le transparent, parallèles

aux axes des abscisses. La clef de l'abaque sous réserve d'une application orientée du transparent s'écrit:

$$(v,\ B)| = |\ C,\quad (u,\ A)\ | - |\ w.$$

Désignons par u^* et v^* les valeurs des variables u et v réalisant le minimum w^* de w pour des valeurs données des paramètres A, B et C. Les valeurs u^*, v^* et w^* peuvent être déterminées à l'aide de l'abaque. A cet effet faisons glisser le transparent orienté sur le fond en respectant le contact $B\ | - |\ C$ et en faisant attention aux cotes des lignes w tangentes à la ligne donnée A. Amenons le transparent dans une position telle que la cote w soit minimale, i.e. soit égale à w^*. Le point C donné sur l'échelle C définit v^*. La valeur u^* se lit au point de tangence. On définit en même temps le domaine des valeurs u et v dans lequel les valeurs de w sont proches de w^* pour A, B et C donnés.

Supposons que $A = 5$, $B = 2$ et $C = 1$. Il vient $u^* = 2{,}4$, $v^* = 1{,}6$, $w^* = 7{,}6$. On établit que les valeurs u et v comprises dans les intervalles $2{,}2 \leqslant u \leqslant 2{,}6$ et $1{,}4 \leqslant v \leqslant 1{,}8$ définissent les valeurs de w proches de $w^* = 7{,}6$.

A signaler que le problème d'extrémum considéré est impossible à résoudre avec un abaque rhomboïdal représentatif de la relation (13.35). L'utilisation des abaques à transparent orienté pour la résolution de problèmes d'extrémum fait l'objet du travail [58].

Exemple 80. Construisons un abaque à transparent orienté pour le système d'équations (9.22) avec la condition (9.23). Les intervalles de variation sont les mêmes que dans l'exemple 66.

Mettons les équations (9.22) sous la forme

$$bxR_f = \frac{M}{h_0 - 0{,}5x} = R_a F_a$$

ou bien

$$(\log x + \log R_f) - (-\log b) = -\log(h_0 - 0{,}5x) - (-\log M) =$$
$$= \log R_a - (-\log F_a).$$

L'équation obtenue s'apparente à la première équation du système (13.30). Pour seconde équation du même système prenons l'identité

$$\log x - 0 = \log x - 0 = \log x - 0.$$

On a

$$f_{12} = \log x + \log R_f,\quad g_{12} = \log x,\quad f_{34} = -\log(h_0 - 0{,}5\,x),$$
$$g_{34} = \log x,\ f_{56} = \log R_a,\ g_{56} = \log x,\ f_{78} = -\log b,$$
$$g_{78} = 0,\ f_{9,10} = -\log M,\ g_{9,10} = 0,\ f_{11,12} = -\log F_a,\ g_{11,12} = 0.$$

L'abaque mis en place par les équations du tableau 50 pour $a_0 = -69{,}03$ mm, $b_0 = -18{,}06$ mm, $a_0' = 60$ mm, $b_0' = 0$, $a =$

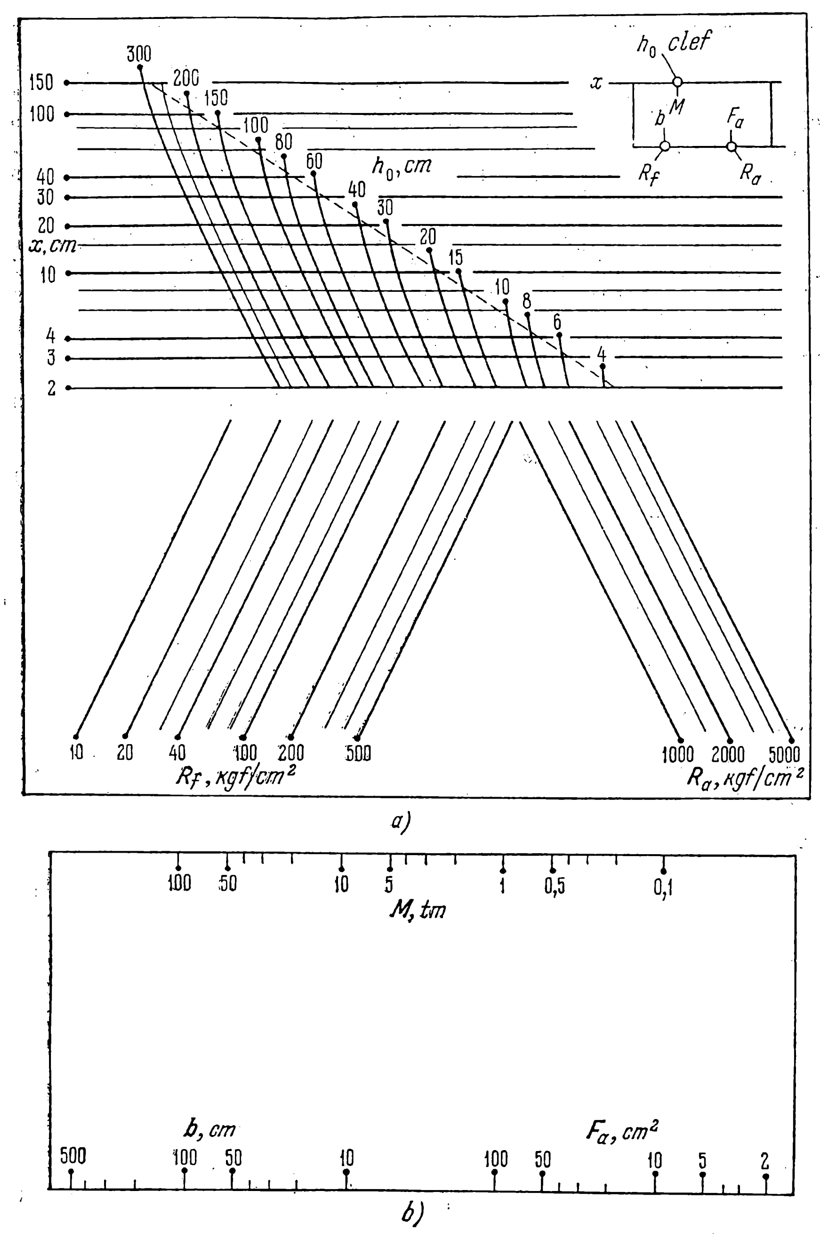


Fig. 289. Abaque à transparent orienté pour le système (9.22) avec la condition (9.23) : *a*) fond ; *b*) transparent

$= 115$ mm, $b = 0$, $c = 300$ mm, $d = 125$ mm, $\mu_x = 60$ mm, $\mu_y =$ $= 60$ mm, $\delta_x = -0{,}5$, $\delta_y = 0$ est tracé sur la figure 289 avec sa clef. On a omis de tracer les droites horizontales x dans les champs (x, R_f) et (x, R_a), car elles sont superflues à la lecture de l'abaque. La droite oblique en pointillé du champ (x, h_0) correspond au cas d'égalité de la condition (9.23).

Exemple 81. Construisons un abaque à transparent orienté pour le système d'équations (11.4) et (11.5) de l'exemple 72 dans lequel C et ω sont envisagés comme des variables auxiliaires [33]. Convenons des limites suivantes de variation : $0{,}1 \leqslant d \leqslant 4$ m ; $0{,}1 \leqslant v \leqslant 5$ m/s; $0{,}001 \leqslant Q \leqslant 100$ m³/s; $0{,}016 \leqslant R \leqslant 1$ m; $0{,}010 \leqslant n \leqslant 0{,}017$; $0{,}0001 \leqslant i \leqslant 0{,}1$; $0{,}2 \leqslant \eta \leqslant 1$.

L'élimination des variables auxiliaires C et ω entre les équations (11.4) et (11.5) du système donne

$$v = F(n, R)\sqrt{i}, \quad Q = d^2 f(\eta)\, v, \quad R = dg(\eta), \tag{13.38}$$

où pour abréger on a posé

$$F(n, R) = \frac{1}{n} R^{2{,}5\sqrt{n} - 0{,}13 - 0{,}75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0{,}1)} \sqrt{R},$$

$$f(\eta) = 0{,}25 \arccos(1 - 2\eta) - (0{,}5 - \eta)\sqrt{\eta - \eta^2},$$

$$g(\eta) = \frac{0{,}25 \arccos(1 - 2\eta) - (0{,}5 - \eta)\sqrt{\eta - \eta^2}}{\arccos(1 - 2\eta)}.$$

Ramenons l'équation (13.38) à la forme (13.30) :

$$\left.\begin{aligned} &0 - \log v = -\log F(n, R) - \log\sqrt{i} = (\log d^2 - \log Q) - [-\log f(\eta)],\\ &\log R - 0 = \log R - 0 = \log d - [-\log g(\eta)]. \end{aligned}\right\}$$

Les équations des éléments de l'abaque s'écrivent

$$\left\|\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & -\log F(n, R) & \log d^2 - \log Q \\ \hline y & \log R & \log R & \log d \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{c|c|c|c} x' & \log v & \log\sqrt{i} & -\log f(\eta) \\ \hline y' & 0 & 0 & -\log g(\eta) \end{array}\right\|.$$

A l'examen de ces équations on voit que les familles de lignes R et d sont représentées sur le fond par des droites parallèles qui peuvent être utilisées comme droites directrices. Sur le transparent on peut choisir pour droites directrices les supports des échelles i et v.

L'abaque et sa clef sont tracés sur la figure 290. Le support de l'échelle R est désigné par I. Dans le champ (n, R), la famille de droites horizontales R de la figure 290, a a été remplacée par l'échelle R. Cette échelle présente un contact avec le support de l'échelle i. L'abaque mis en place par les équations du tableau 50 a été tracé pour les valeurs suivantes des paramètres de transformation : $a_0 =$ $= a'_0 = b'_0 = 0$, $b_0 = 197$ mm, $a = 37{,}5$ mm, $b = -35$ mm, $c =$

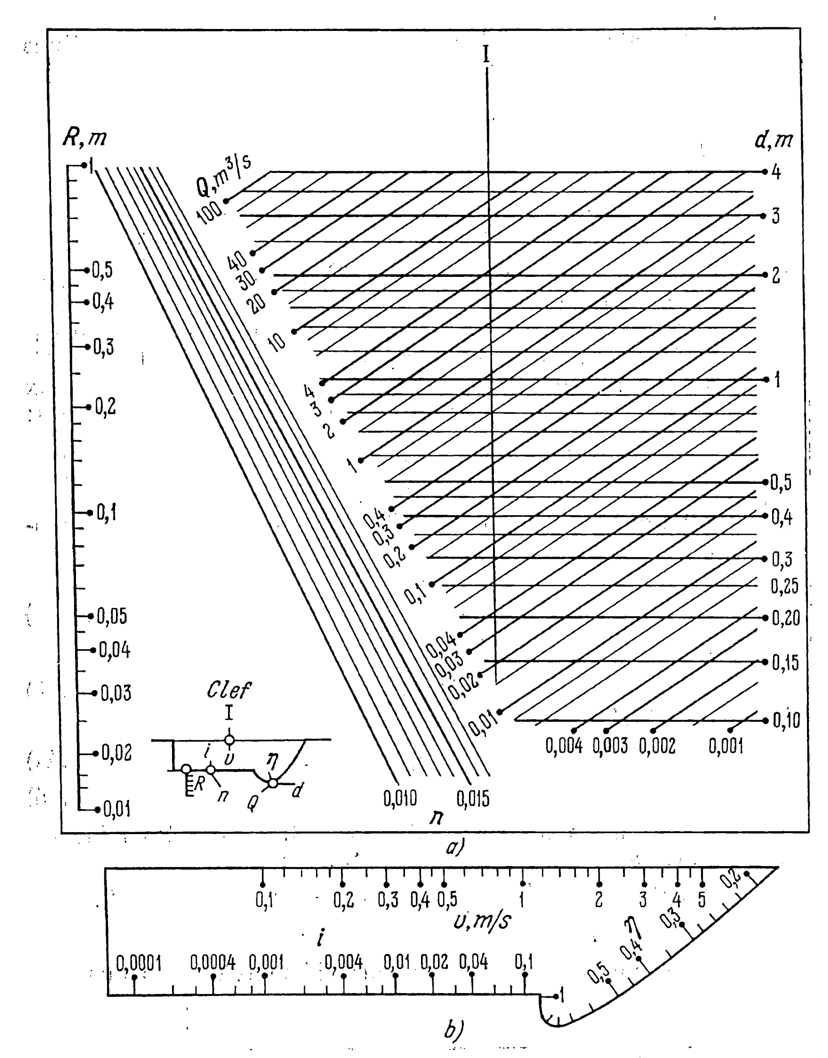


Fig. 290. Abaque à transparent orienté pour le système d'équations (11.4) et (11.5) où C et ω sont envisagés comme des variables auxiliaires: *a*) fond; *b*) transparent

$= -3$ mm, $d = -97$ mm, $\mu_x = 75$ mm, $\mu_y = 100$ mm, $\delta_x = \delta_y = 0$.

La clef de l'abaque sous forme de contact et sous réserve d'une application orientée du transparent s'écrit

$$R \mid - \mid L_i, \quad \mathrm{I} \mid - \mid v, \quad n \mid - \mid i, \quad (Q,\ d) \mid = \mid \eta,$$

où L_i est le support de l'échelle i.

§ 13.6. Abaques à transparent orienté pour certaines formes canoniques transformables

Parmi les cas particuliers des formes canoniques (13.28) et (13.30) il en est une série dont les abaques sont susceptibles de transformations supplémentaires [29, 79]. A ces formes se rattachent par exemple la forme (13.31) qui admet l'introduction de trois fonctions arbitraires dans les équations des éléments des abaques. Signalons deux formes à quatre variables dont les abaques sont transformables:

$$f_{12} + F(\alpha_3,\ g_{12}) + f_4 = 0, \tag{13.39}$$

$$f_{12} + g_{12}g_{34} + f_{34} = 0. \tag{13.40}$$

Représentation de la forme (13.39). Dans la forme (13.39) supposons que

$$M = f_{12} + f_4, \tag{13.41}$$

$$N = g_{12}. \tag{13.42}$$

L'équation (13.39) s'écrit alors

$$M + F(\alpha_3,\ N) = 0, \tag{13.43}$$

et l'équation (13.42):

$$T(g_{12}) = T(g_{12}) = T(N), \tag{13.44}$$

$$P(g_{12}) = P(g_{12}) = P(N), \tag{13.45}$$

où P et T sont des fonctions arbitraires. Ramenons les relations (13.41), (13.44) et (13.45) à la forme (13.30):

$$\left.\begin{aligned} [f_{12}+P(g_{12})]-0=[f_{12}+P(g_{12})+a]-a &= [M+P(N)]-f_4, \\ T(g_{12})-0=T(g_{12})-0 &= T(N)-0, \end{aligned}\right\}$$

où a est un paramètre. Les équations des éléments de l'abaque sont

x	$f_{12}+P(g_{12})$	$f_{12}+P(g_{12})+a$	$M+P(N)$
y	$T(g_{12})$	$T(g_{12})$	$T(N)$

,

x'	0	a	f_4
y'	0	0	0

.

L'abaque est représenté sur la figure 291. Les points fixes ont été désignés par M_1 et M_2. Dans le premier champ (α_1, α_2) sont mises en place seulement les lignes α_1, dans le deuxième champ les lignes α_2. La famille de lignes α_3 a été tracée dans le champ (M, N) à l'aide de l'équation (13.43).

Le transparent est guidé par des directrices parallèles à l'axe des abscisses. La clef de l'abaque est:

$$\alpha_1 \mid - \mid M_1, \quad \alpha_2 \mid - \mid M_2, \quad \alpha_3 \mid - \mid \alpha_4,$$

sous réserve d'une application orientée du transparent. Elle est représentée schématiquement sur la figure 292.

Le trait remarquable de cet abaque est la possibilité de *dissociation des familles de lignes dans le champ* (α_1, α_2) par l'introduction

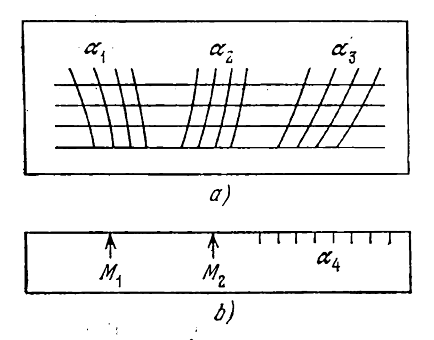


Fig. 291. Schéma d'un abaque à transparent orienté pour l'équation $f_{12} + F(\alpha_3, g_{12}) + f_4 = 0$: *a*) fond; *b*) transparent

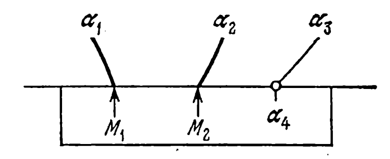


Fig. 292. Clef de l'abaque de la figure 291

d'un paramètre a et de deux fonctions arbitraires susceptibles de transformer les familles de lignes.

Lorsque $a = 0$, les familles de lignes α_1 et α_2 forment le champ binaire (α_1, α_2).

Représentation de la forme (13.40). Mettons-la sous la forme du déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & f_{12} & 1 \\ 1 & g_{12} & 1 \\ \dfrac{g_{34}}{1+g_{34}} & \dfrac{-f_{34}}{1+g_{34}} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

multiplions ce déterminant par le déterminant numérique (4.13), puis développons le déterminant obtenu suivant les éléments de la troisième rangée. Toutes transformations faites on obtient de nou-

veau une relation du type (13.40), soit

$$\bar{f}_{12}+\bar{g}_{12}\bar{g}_{34}+\bar{f}_{34}=0,$$

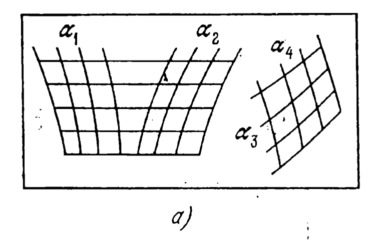
où $\bar{f}_{12}$, $\bar{g}_{12}$, $\bar{f}_{34}$ et $\bar{g}_{34}$ dépendent des paramètres introduits. La relation obtenue se réduit à la forme (13.30) par deux procédés:

$$\left.\begin{aligned} -\bar{f}_{12}-0&=(-\bar{f}_{12}+a)-a=\bar{f}_{34}+\beta, \\ -\log \bar{g}_{12}-0&=-\log \bar{g}_{12}-0=\log \bar{g}_{34}-\log \beta \end{aligned}\right\}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \log \bar{f}_{12}-0&=(\log \bar{f}_{12}+a)-a=\log \bar{f}_{34}-\log \beta, \\ \log\left(-\frac{\bar{g}_{12}}{\bar{f}_{12}}\right)-0&=\log\left(-\frac{\bar{g}_{12}}{\bar{f}_{12}}\right)-0=-\log \bar{g}_{34}+\log(1+\beta), \end{aligned}\right\}$$

β est ici une variable auxiliaire, a, un paramètre. On suppose que les fonctions figurant sous le signe du logarithme sont positives. Dans



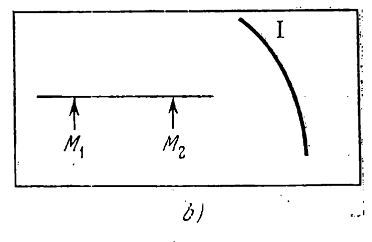


Fig. 293. Schéma d'un abaque à transparent orienté pour l'équation $f_{12}+ g_{12}g_{34}+f_{34}=0$: *a*) fond; *b*) transparent

les deux cas l'abaque est représenté sur la figure 293. Les points fixes ont été désignés par M_1 et M_2. Ils sont situés sur la directrice. On a retiré la famille de lignes α_2 du champ (α_1, α_2) et la famille α_1 du deuxième champ (α_1, α_2). Le support de l'échelle β a été désigné par I. Le transparent est guidé par des droites parallèles tracées sur le fond. La clef est:

$$\alpha_1 | - | M_1, \quad \alpha_2 | - | M_2, \quad (\alpha_3, \alpha_4) | - | \mathrm{I},$$

sous réserve d'une application orientée du transparent.

Les possibilités supplémentaires de transformation se traduisent ici par une variation des paramètres introduits, une dissociation des lignes dans le champ (α_1, α_2) et deux procédés de réduction à la forme (13.30). On peut par ailleurs permuter les champs (α_1, α_2) et (α_3, α_4) en raison de la symétrie de la forme (13.40).

La relation (3.23) étudiée au § 3.7 se ramène à la forme (13.40) de la manière suivante:

$$f_{12}(\alpha, \beta)+g_{12}(\alpha, \beta)\frac{A(a, b)}{B(a, b)}+[-A(a, b)]=0.$$

CHAPITRE 14

PROBLÈMES GÉNÉRAUX DE LA NOMOGRAPHIE PRATIQUE ET THÉORIQUE

Dans les chapitres précédents nous avons étudié les méthodes de construction d'abaques de divers types. Pour conclure penchons-nous sur quelques problèmes généraux de la nomographie pratique et théorique, plus exactement sur l'application des abaques au calcul et à l'étude de relations fonctionnelles, la construction d'abaques exacts et approchés, les méthodes de construction et de mise au net des abaques, les problèmes de la nomographie théorique, les rapports de la nomographie avec les calculatrices.

§ 14.1. Application des abaques au calcul

Dans la hiérarchie de la technique du calcul l'abaque occupe le bas de l'échelle. C'est en effet la plus simple des calculatrices. Il peut être envisagé comme un accumulateur d'information, déterminant l'information initiale et finale et le mode d'emploi de cette dernière.

Le domaine d'application des abaques au calcul est tributaire de la précision fournie, laquelle dépend de la formule à représenter, des intervalles de variation des variables, des dimensions de l'épure et du type d'abaque choisi. En moyenne les abaques sont susceptibles de fournir des réponses au centième ou au millième. Cette précision suffit pour la plupart des problèmes pratiques. Dans les meilleurs des cas, les réponses sont fournies au dix-millième: voir par exemple les abaques d'interpolation des figures 137 et 141.

A noter que la précision des réponses fournies par les abaques varie avec les combinaisons des grandeurs données. Ce n'est que dans les plus simples des cas que l'on arrive à tracer des abaques donnant la réponse avec la même erreur absolue ou relative. Cependant ces cas sont assez fréquents en pratique.

Il est particulièrement difficile de construire un abaque assurant la précision de calcul voulue lorsque la réponse est à lire dans un champ binaire. Parfois on arrive à améliorer cette précision en introduisant une somme, un quotient ou un produit de variables. Cet artifice permet quelquefois de remplacer les champs binaires par

des échelles. Pour accroître la précision on trace l'abaque non pas de toute la formule mais de certaines de ses parties. On peut enfin utiliser des abaques fractionnés en fractionnant les intervalles de variation des variables et en construisant une série d'abaques représentant la proposée. On trouvera des exemples d'abaques fractionnés dans [40].

Il importe d'attacher une sérieuse attention au choix des intervalles de variation des variables. Il est aussi mauvais de les réduire que de les élargir. On construit généralement un abaque sous l'hypothèse que l'une des variables est *de résolution*, les limites de variation pouvant être *complètes* ou *incomplètes*. Le dernier cas est plus avantageux pour la construction de l'abaque en ce sens qu'il assure la précision de calcul voulue.

La lecture d'un abaque approchée doit tenir compte de l'*erreur d'approximation* de l'abaque et de l'*erreur de lecture*.

Si les abaques n'assurent pas la précision voulue, ils peuvent servir d'appoint dans des calculs estimatifs pour déterminer les approximations d'ordre zéro et mettre en évidence les erreurs grossières.

Les abaques à points alignés, à points équidistants, au compas et barycentriques se prêtent le mieux aux calculs. Aussi essayera-t-on dans la mesure du possible de se limiter au seul usage de ces types d'abaques. Les abaques à transparent orienté sont parfois les seuls à résoudre des équations ou systèmes d'équations transcendantes faisant intervenir un grand nombre de paramètres variables. On trouvera des exemples de résolution dans les travaux [32-34, 38, 39].

§ 14.2. Application des abaques à l'étude de relations fonctionnelles

Une propriété importante des abaques est la possibilité de s'en servir pour l'étude des relations fonctionnelles qu'ils représentent, plus exactement pour

1) étudier l'influence de certains paramètres sur d'autres;

2) donner une interprétation géométrique suggestive de certaines propriétés connues de la formule à représenter;

3) établir à l'aide de l'abaque les traits remarquables de la formule étudiée.

L'abaque destiné à l'analyse de la relation fonctionnelle doit insister essentiellement sur le graphique de cette relation. Le problème de la précision des réponses passe au second plan. Il est préférable de prendre des intervalles complets pour englober tous les cas du calcul. Les abaques à transparent orienté et les abaques à points alignés sont les mieux adaptés à l'analyse des relations fonctionnelles.

Les problèmes d'approximation d'une fonction par une autre et les problèmes de détermination des paramètres des formules empi-

riques offrent un vaste terrain d'applications pour les méthodes nomographiques d'étude des relations fonctionnelles. Les méthodes nomographiques de recherche des extrémums des relations présentent également un intérêt appréciable.

L'application de la méthode nomographique permet d'obtenir des résultats scientifiques moyennant:

1) l'analyse des abaques;

2) la construction d'abaques pour les formules inutilisables dans la pratique en raison de leur complexité;

3) la précision des formules de calcul suivie de leur représentation par des abaques. En posant des problèmes et en déduisant les formules de calcul, on fait parfois des hypothèses simplificatrices afin d'obtenir des formules commodes au calcul. Il peut s'avérer que ces formules ne soient pas représentables par des abaques alors que les relations primitives complexes le sont sans aucune restriction simplificatrice. La construction de tels abaques constitue en soi un important résultat scientifique.

Les abaques dont les éléments admettent une interprétation physique présentent un grand intérêt dans la mesure où ils sont à la fois un instrument de calcul et un modèle géométrique suggestif de la formule. Sont susceptibles de posséder une signification les supports des échelles, leurs points d'intersection, la courbure des supports des échelles, le point de tangence de la droite résolvante avec les supports des échelles, la courbure des lignes dans les champs binaires, la droite résolvante et son point d'intersection avec les supports des échelles, etc.

Plus bas sont exhibés des exemples d'utilisation des abaques à l'étude de relations fonctionnelles.

Exemple 82. Etant données les fonctions $\varphi(x)$, $Af(x)^B$ où A et B sont des paramètres [29, 84], on demande les valeurs des paramètres A et B qui, sur l'intervalle $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, minimisent la plus grande erreur absolue d'approximation relative en pour-cent δ:

$$\delta = 100\,\frac{\varphi(x) - Af(x)^B}{\varphi(x)}. \qquad (14.1)$$

Désignons par δ_0 la valeur correspondante du module de l'erreur δ, qui est à déterminer aussi.

Représentons la relation (14.1) par un abaque à points alignés et utilisons ses propriétés géométriques remarquables pour déterminer la méthode de résolution du problème posé.

Mettons l'équation (14.1) sous la forme

$$1 - \frac{\delta}{100} = \frac{Af(x)^B}{\varphi(x)}$$

ou

$$\log(1 - \delta/100) = \log A + B\log f(x) - \log\varphi(x). \qquad (14.2)$$

Pour $-5 \leqslant \delta \leqslant 5\%$ la fonction $\log(1 - \delta/100)$ peut être avec suffisamment de précision remplacée par la fonction $M\,\delta/100$, où $M = \log e = 0{,}4343$. L'équation (14.2) s'écrit

$$0{,}004343\,\delta = \log A + B \log f(x) - \log \varphi(x).$$

L'introduction de la variable auxiliaire I décompose l'équation obtenue en deux équations

$$0{,}004343\,\delta + I = \log A \quad \text{et} \quad I + B \log f(x) - \log \varphi(x) = 0,$$

s'apparentant respectivement aux formes (6.11) et (6.14). Représentons ces deux équations par un abaque à échelles composé à points alignés à double alignement. L'abaque de l'équation (14.1) est montré sur la figure 294. Il est constitué des échelles parallèles δ, A, I, B et de l'échelle curviligne x. Les échelles δ et B sont métriques, l'échelle A logarithmique. L'allure de l'échelle curviligne x dépend des fonctions initiales $\varphi(x)$ et $f(x)$. Supposons pour fixer les idées que le support de cette échelle est de la forme représentée schématiquement sur la figure 294. Supposons par ailleurs que les points de cotes négatives de l'échelle métrique δ sont situés plus haut que le point de cote 0.

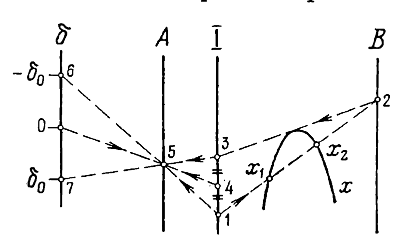


Fig. 294. Schéma d'un abaque à points alignés pour la relation (14.1) et indication de la méthode de calcul des paramètres A, B et δ_0

Pour résoudre le problème posé nous allons utiliser le fait que les échelles I et δ sont parallèles, que l'échelle δ est métrique et l'échelle x curviligne (la droite résolvante est susceptible de la couper en deux points ou de lui être tangente).

Menons par les points de cotes x_1 et x_2 une droite qui coupera les échelles I et B respectivement aux points *1* et *2*. La cote du point *2* fait connaître B. A partir du point *2* traçons une tangente au support de l'échelle x jusqu'à son intersection *3* avec l'échelle I. Positionnons le point *4*, milieu du segment d'extrémités *1* et *3*. La droite qui joint le point *4* au point coté 0 de l'échelle δ coupe l'échelle A au point *5* dont la cote fait connaître A. Enfin, en joignant les points *1* et *3* au point *5* par des droites, on obtient à leurs intersections avec l'échelle δ les points *6* et *7* équidistants du point coté 0 de l'échelle δ. Le point *6* aura la cote $-\delta_0$, le point *7* la cote δ_0. Sur la figure 294 on voit que les points A et B sont tels que quel que soit x compris entre x_1 et x_2 on a $-\delta_0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$.

La figure 295 représente l'abaque de la relation

$$\delta = 100\,\frac{\log x - Ax^B}{\log x}, \tag{14.3}$$

qui dérive de la relation (14.1) si l'on y pose $\varphi(x) = \log x$ et $f(x) = x$. L'abaque permet de substituer une fonction puissance à une fonction logarithmique. Les droites en pointillé correspondent à la

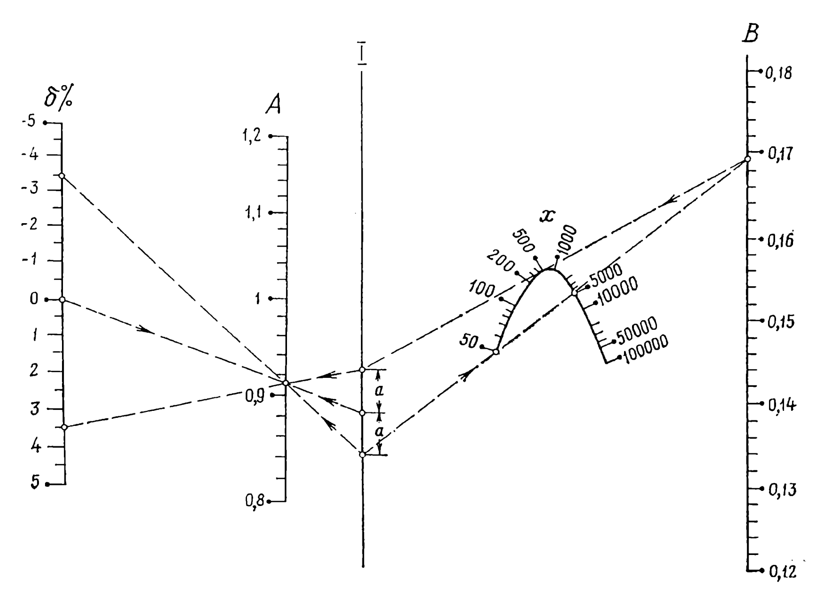


Fig. 295. Abaque à points alignés pour l'équation (14.3)

solution de l'exemple numérique : $x_1 = 50$, $x_2 = 5\,000$; réponse $A = 0{,}91$, $B = 0{,}169$, $\delta_0 = 3{,}5\%$.

Exemple 83. Dans les canaux en profil de trapèze [33] le débit d'eau

$$Q = \frac{i^{1/2}\omega^{4/3}}{n} \cdot \frac{(\beta + m)^{1/3}}{(\beta + 2\sqrt{1+m^2})^{2/3}}, \tag{14.4}$$

i, n, ω et m étant donnés, atteint sa valeur maximale

$$Q^* = \frac{i^{1/2}\omega^{4/3}}{n} \cdot \frac{1}{(8\sqrt{1+m^2} - 4m)^{1/3}} \tag{14.5}$$

pour

$$\beta^* = 2(\sqrt{1+m^2} - m), \tag{14.6}$$

qui est la valeur du paramètre β la plus rentable hydrauliquement. Ici Q est le débit, i, la déclivité, n, le coefficient de rugosité, ω, l'aire mouillée du canal, m, le coefficient d'écartement des berges. Le tableau 52 contient les valeurs β^* calculées à l'aide de la formu-

le (14.6). A l'examen du tableau 52 on constate que la valeur maximale $\beta^* = 2$ correspond à un profil rectangulaire ($m = 0$). Mais dans la pratique les canaux en profil de trapèze sont généralement

Tableau 52

m	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
β^*	2	1,236	0,828	0,606	0,472	0,385	0,325

aplatis, i.e. leur largeur au fond vaut plusieurs fois leur profondeur, donc $\beta > \beta^*$. Il serait de ce fait intéressant de savoir comment influe l'écart de β par rapport à β^* sur la réduction relative du débit en pour cent, soit

$$\delta Q = 100\frac{Q^* - Q}{Q^*}. \quad (14.7)$$

En portant les expressions (14.4) et (14.5) de Q et Q^* dans l'équation (14.7), on obtient

$$\left(1 - \frac{\delta Q}{100}\right)^3 = \frac{(\beta + m)\,(8\sqrt{1+m^2} - 4m)}{(\beta + 2\sqrt{1+m^2})^2}. \quad (14.8)$$

L'équation (14.8) est du second degré en β. Comme nous sommes intéressés par l'écart maximum de β par rapport à β^* nous allons considérer la racine dominante de cette équation, soit

$$\beta = -2\sqrt{1+m^2} + \frac{4\sqrt{1+m^2} - 2m}{1 - \sqrt{1 - (1 - \delta Q/100)^3}}. \quad (14.9)$$

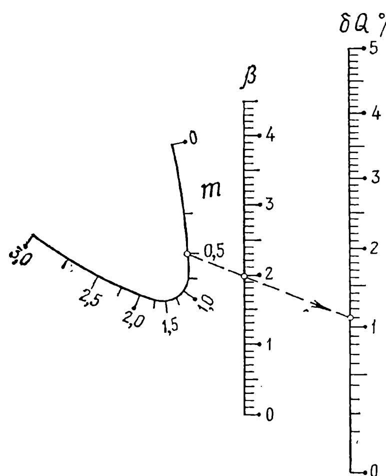


Fig. 296. Abaque à points alignés pour l'équation (14.9)

A remarquer que la formule (14.9) se transforme en la formule (14.6) pour $\delta Q = 0$.

Ainsi on est conduit à étudier l'équation (14.9). Utilisons à cet effet un abaque. L'équation (14.9) se ramène à la forme (6.14) et se représente par un abaque à points alignés constitué des échelles parallèles β et δQ et de l'échelle curviligne m. Dans cet abaque qui est représenté sur la figure 296, la droite en pointillé correspond à la solution de l'exemple numérique: $m = 0{,}5$, $\beta = 2$; réponse $\delta Q = 1{,}1\,\%$.

En faisant pivoter le bord de la règle autour du point coté 0 de l'échelle δQ on obtient la valeur β^* à l'intersection de la règle avec l'échelle β. On voit qu'une variation de m entre 0 et 3 entraîne une variation de β^* entre 2 et 0,32, ce qui corrobore entièrement les données du tableau 52.

Il est naturel d'appeler *hydrauliquement rentables* les valeurs β telles que la quantité δQ n'excède pas une valeur admissible δQ_0 (par exemple l'erreur de 2 à 3 % de la formule du débit). Le domaine des valeurs hydrauliquement rentables est délimité sur l'échelle β par des droites joignant le point de cote donnée de l'échelle m aux points de l'échelle δQ de cotes 0 et de valeur donnée δQ_0.

L'échelle δQ se distingue par une irrégularité de la distribution des cotes qui est nettement exprimée en particulier au début de l'échelle où l'échelon, de 0,1 % environ, est 10 fois plus grand qu'à l'extrémité. L'irrégularité de l'échelle δQ et les dimensions relativement peu élevées de l'échelle m expriment le fait que les quantités δQ seront insignifiantes même pour de grands écarts de β par rapport à β^*. En effet, si l'on pose par exemple $\beta = 2$ indépendamment de la quantité m, on voit sur l'abaque que le maximum de δQ sera égal à 2 % environ. En effet, la tangente au support de l'échelle m menée par le point coté 2 de l'échelle β coupe l'échelle δQ en un point de cote égale à environ 2 %. Or, ainsi qu'il ressort du tableau 52 et de l'abaque $\beta = 2$ est la plus rentable hydrauliquement pour un profil rectangulaire. Donc l'analyse de l'abaque nous conduit à la conclusion que la valeur β la plus rentable hydrauliquement au profil rectangulaire est rentable hydrauliquement à tous les profils en trapèze, puisque les écarts δQ sont du même ordre que l'erreur de la formule du débit. Donc la formule (14.6) et le tableau 52 ne possèdent qu'une signification formelle et sont dénués de tout intérêt pratique.

Exemple 84. En hydraulique, pour simplifier les calculs, on remplace parfois les formules empiriques du coefficient de Chezy

$$C = C(n, R) \tag{14.10}$$

par les formules

$$C = \frac{1}{n} R^{y_0}, \tag{14.11}$$

où y_0 est une constante, R, le rayon hydraulique, n, le coefficient de rugosité. L'erreur relative en pour cent, consécutive à cette substitution, est exprimée par la formule

$$\delta C = 100 \frac{C(n, R) - \frac{1}{n} R^{y_0}}{C(n, R)}. \tag{14.12}$$

Etudions sur un abaque [33] l'influence du paramètre y_0 et des variables n et R sur la quantité δC. La relation (14.12) est représen-

table par un abaque à points alignés puisqu'elle se réduit à la forme (6.22):

$$-\log(1-\delta C/100)+y_0\log R-\log[nC(n,R)]=0.$$

La figure 297 représente l'abaque de la relation

$$\delta C=100\left[1-R^{y_0-2,5\sqrt{n}+0,13+0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)}\right], \tag{14.13}$$

qui se déduit de la relation (14.12) par substitution à $C(n, R)$ de la formule complète de N. Pavlovski

$$C=\frac{1}{n}R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)}. \tag{14.14}$$

Les intervalles de variation sont

$$0,010\leqslant n\leqslant 0,040,\quad 0,1\leqslant R\leqslant 3\ \text{m},$$
$$0,12\leqslant y_0\leqslant 0,35,\quad -30\leqslant \delta C\leqslant 15\ \%.$$

L'abaque est constitué des échelles parallèles δC et y_0 et du champ binaire (n, R) mis en place par une famille de droites parallèles R

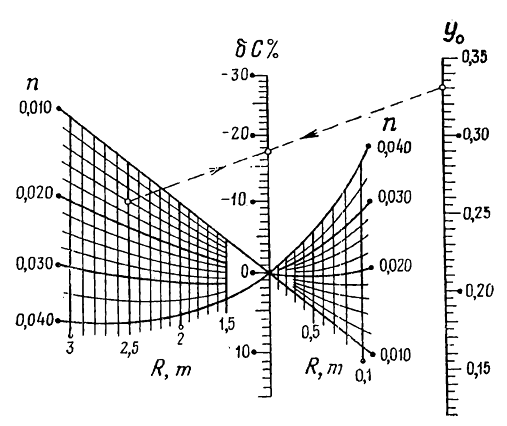


Fig. 297. Abaque à points alignés pour l'équation (14.13)

et une famille de lignes n. La droite cotée 1 m de la famille R coïncide avec le support de l'échelle δC. Les lignes n forment un faisceau de sommet le point coté 0 de l'échelle δC. Donc pour $R = 1$ m, la quantité $\delta C = 0$ quel que soit n. Ceci s'explique par le fait que les formules (14.11) et (14.14) donnent la même valeur $C = 1/n$ pour $R = 1$ m. La ligne droite en pointillé figure la solution de l'exemple numérique: $n = 0,016$, $R = 2,5$m, $y_0 = 0,33$; réponse $\delta C = -17,3$ %.

Les lignes du faisceau n étant suffisamment espacées, il est impossible de trouver une valeur y_0 telle que la formule (14.11) remplace la formule (14.14) avec une erreur relative insignifiante sur les limites complètes de variation des variables n et R.

Si les lignes n sont proches de droites, cela signifie que la formule (14.14) peut être remplacée avec une erreur relative insignifiante par des formules du type (14.11) quel que soit n fixe. Ceci étant, à toute valeur de n aurait été associée une valeur y_0 définie comme la cote y_0 du point de concours de son prolongement avec la droite donnée n.

Pour n petit les lignes n sont proches de droites (la ligne $n = 0{,}010$ est une droite). La courbure des lignes n croît avec n, d'où il résulte que pour n fixe, l'erreur relative entraînée par la substitution de la formule (14.11) à la formule (14.14) croît avec la valeur fixée de n. Ainsi pour la valeur maximale $n = 0{,}040$ et $0{,}1 \leqslant R \leqslant 3$ m, on trouve $y_0 = 0{,}31$ et $-8 \leqslant \delta C \leqslant 0{,}2$ %.

Si l'on se donne une erreur relative admissible $\delta C_0 > 0$, en joignant un point quelconque de l'échelle y_0 aux points de l'échelle δC cotés $-\delta C_0$ et δC_0, on obtient dans le champ binaire (n, R) le domaine de valeurs de n et R tel que $|\delta C| \leqslant \delta C_0$. Ce domaine est suffisamment vaste. Ses bords dépendent de la valeur choisie y_0.

On trouvera d'autres exemples d'étude de relations fonctionnelles par des abaques dans les travaux [26, 29, 30, 32, 33, 71, 79].

§ 14.3. Abaques exacts et approchés

Quand on a une relation à étudier on peut la représenter par un *abaque exact* ou par un *abaque approché.*

Dans le premier cas on la ramène à l'une des formes canoniques indiquées plus haut.

A remarquer que si la relation ne renferme que trois variables on peut toujours la représenter par un abaque à entrecroisement ou, moyennant une transformation de ce dernier, par des abaques à points alignés et à points équidistants (§ 5.1) ou des abaques à contacts tangentiels (§§ 5.3 et 5.4).

Dans les cas particuliers où la relation à trois variables rentre dans l'une des formes canoniques (6.9) et (6.11) à (6.20) elle peut être représentée par un abaque à échelles à points alignés.

Si la proposée contient quatre variables et plus, elle n'est pas représentable par un abaque dans le cas général. Cependant les relations impliquant un grand nombre de variables, que l'on rencontre en pratique sont généralement représentables par des abaques.

On essaye d'abord de représenter la proposée par un abaque simple. Si l'on ne réussit pas on envisage la construction d'abaques composés. Dans les cas complexes on recourt à la répétition des variables, à l'introduction, en guise de nouvelles variables, d'un

produit, d'un quotient ou d'une somme des variables, enfin à la représentation de parties de la formule.

Parfois on arrive à représenter la proposée par plusieurs types d'abaques. Il faut alors choisir l'abaque optimal en fonction des hypothèses données. Si par exemple l'on a réussi à ramener la proposée à la forme

$$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46},$$

on sait qu'elle est représentable par plusieurs types d'abaques dont l'étude comparative fait l'objet du travail [82]. Signalons dans le même ordre d'idées le travail [83] qui développe les diverses méthodes de représentation de la forme

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 0.$$

A la fin de l'ouvrage on trouvera une liste des formes canoniques représentables par des abaques simples et des abaques composés, constitués d'abaques simples du même type ou de types divers.

Lorsque la proposée ne se réduit pas à une forme représentable, ou lorsqu'elle est donnée tabulairement ou que son abaque exact est trop lourd, on se tourne vers un abaque approché. Le principe de l'abaque approché consiste à remplacer avec une certaine erreur admissible la proposée par une relation représentable par un abaque.

Récapitulons les méthodes de construction d'abaques approchés examinées dans cet ouvrage.

1. Au § 3.7 on a étudié une méthode d'approximation de relations à trois et quatre variables par des relations représentables par des abaques à points alignés et à transparent orienté. Ces questions sont vues plus en détail dans le travail [57].

2. Au § 5.8 on a donné l'algorithme de la substitution approchée d'abaques cartésiens rectilignes aux abaques cartésiens dans le but de les transformer en abaques à points alignés. Les figures 114 et 119 représentent des abaques approchés. Ce sujet est traité plus en détail dans les travaux [84, 85].

3. Au § 8.1 on a exposé l'algorithme de construction d'un abaque à entrecroisement approché pour une relation à quatre variables. Cet algorithme fait l'objet d'une étude plus détaillée dans le travail [68] où sont exhibés des exemples de construction d'abaques approchés.

4. Aux §§ 6.10, 6.12 et 9.4 on s'est penché sur une méthode de représentation de cases tabulaires à deux et trois entrées, admettant une interpolation linéaire sur toutes les variables. Les abaques tracés seront approchés pour les fonctions données par ces cases tabulaires, et exacts pour les formules d'interpolation correspondantes. Les méthodes de construction d'abaques d'interpolation sont traitées dans les travaux [28, 29, 86 à 88].

D'autres méthodes de représentation par des abaques approchés figurent dans [22, 29, 62, 71, 84, 89-103]. L'article [104] passe en revue les derniers travaux sur les méthodes de représentation approchée.

Citons des exemples d'abaques approchés.

Exemple 85. La figure 298 représente un abaque approché à points alignés [105] pour la table de Forster-Rybkine [106] utilisée dans les

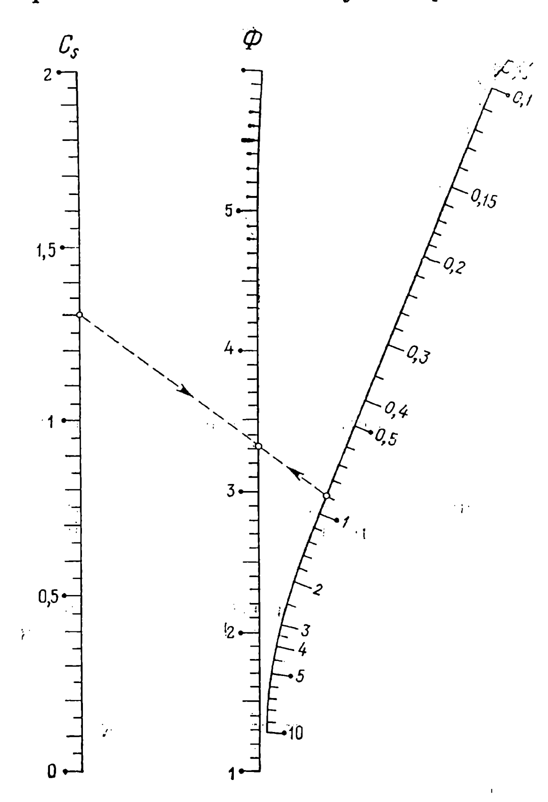


Fig. 298. Abaque approché à points alignés pour la table de Foster-Rybkine [98] utilisée dans les calculs hydrauliques

calculs hydraulogiques. Cette table renferme les valeurs de la fonction

$$\Phi = F(C_s, p),$$

où C_s est le coefficient d'asymétrie, p, la probabilité de dépassement en pour cent, Φ, l'écart normé à la moyenne. L'abaque est construit

sur les intervalles

$$0 \leqslant C_s \leqslant 2, \quad 0{,}1 \leqslant p \leqslant 10\ \%, \quad 1 \leqslant \Phi \leqslant 6,$$

correspondant au calcul de crues maximales. Pour tracer l'abaque approché on s'est servi de la méthode développée dans [93]. La plus

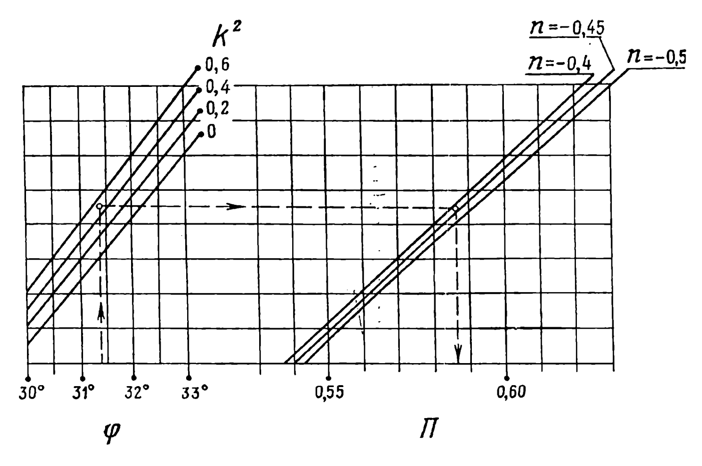


Fig. 299. Abaque composé approché à entrecroisement pour l'intégrale elliptique (14.15)

grande erreur d'approximation sur Φ ne dépasse pas 0,04. La droite en pointillé figure la solution de l'exemple numérique: $C_s = 1{,}3$, $p = 0{,}9$ % ; réponse $\Phi = 3{,}32$.

Exemple 86. La figure 299 représente un abaque à entrecroisement composé approché [68], tracé d'après la méthode du § 8.1 pour le calcul de l'intégrale elliptique

$$\Pi = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{(1 + n \sin^2 \alpha) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \tag{14.15}$$

sur les intervalles

$$30° \leqslant \varphi \leqslant 33°, \quad -0{,}5 \leqslant n \leqslant -0{,}4, \quad 0 \leqslant k^2 \leqslant 0{,}6.$$

Pour tracer l'abaque on s'est servi des tables [107]. L'erreur affectant Π n'excède pas 0,0003. Les droites en pointillé correspondent à la solution du cas numérique: $\varphi = 31{,}4°$, $k^2 = 0{,}5$, $n = -0{,}43$; réponse $\Pi = 0{,}587$. Les familles de lignes k^2 et n étant presque rectilignes, on peut, en utilisant le principe de dualité, transformer cet abaque en un abaque à échelles à points alignés à double alignement.

L'abaque transformé est représenté sur la figure 300. La quantité Π se trouve par une double application de la règle. Les droites en pointillé figurent la solution de l'exemple numérique précédent.

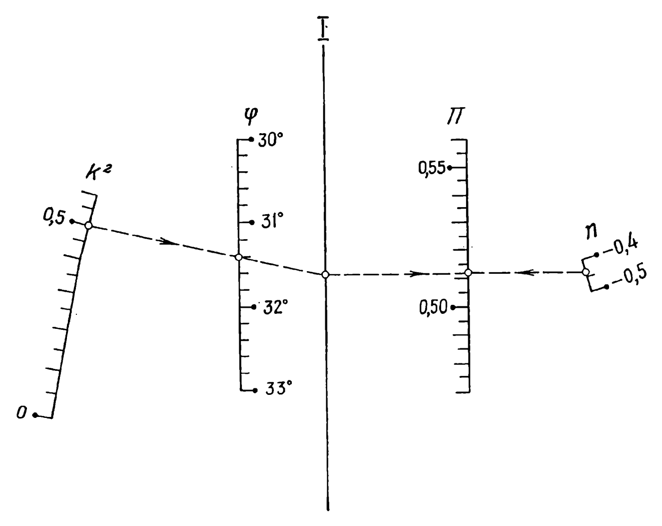


Fig. 300. Abaque composé approché à points alignés, dual de l'abaque de la figure 299, dans lequel les familles de courbes k^2 et n ont été préalablement remplacées par des familles de droites

La précision de l'abaque transformé est légèrement inférieure à celle de l'abaque à entrecroisement initial en raison de la substitution de familles de droites aux familles de courbes.

§ 14.4. Tracé et mise au net des abaques

Pour tracer les abaques on utilise les méthodes du dessin industriel en s'arrangeant pour réduire au minimum les erreurs graphiques. Il importe de vérifier soigneusement les instruments. Pour mettre en place le réseau de coordonnées on pourra se servir d'une *règle de Drobychev* utilisée en géodésie et en cartographie. Le *coordinatographe* est plus commode encore pour porter les coordonnées des points des échelles, des familles de lignes et des champs binaires.

L'abaque est tracé sur du gros papier d'abord au crayon, et ensuite à l'encre de chine. Pour réduire les erreurs graphiques il faut confier cette opération à la même personne. Généralement les abaques sont tracés pour être réduits en photographie, le meilleur coefficient de réduction étant 0,7. Pour faciliter le contrôle des er-

reurs commises pendant la photographie, il est souhaitable de mettre les abaques en place dans un cadre rectangulaire. Après réduction les diagonales du cadre doivent être égales.

Le papier carton convient le mieux à la reproduction des abaques.

On commence à utiliser des calculatrices couplées à des traceurs de courbes dans le calcul automatique (cf. § 14.6).

Une disposition et des annotations judicieuses contribueraient sans aucun doute à répandre l'usage des abaques dans la pratique. Les abaques doivent être mis en place de façon à être lus sans effort. Le mode d'emploi doit sauter aux yeux. Il faut les munir d'annotations suggestives et d'exemples numériques. Il faut éviter de les surcharger avec des annotations et des dessins superlfus. Les annotations doivent être explicites, i. e. le déchiffrement du mode et du domaine d'emploi ne doit pas renvoyer à une étude de la méthode de construction, laquelle doit figurer à part.

Les recueils d'abaques édités par le Centre de calcul de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. [32 à 43] fournissent des exemples d'abaques et d'annotations correctement présentés.

§ 14.5. Problèmes de la nomographie théorique

La *représentabilité* et l'*unicité* sont des problèmes essentiels en nomographie théorique.

Par représentabilité on entend la possibilité de ramener l'équation ou le système d'équations donné à une forme canonique (si cela est possible on indiquera l'algorithme de cette réduction). Ce problème a été résolu pour certaines formes canoniques qui ne sont pas utilisées en pratique en raison de leur complexité. Cependant cette voie n'est pas à négliger dans la mesure où il est possible d'utiliser les calculatrices pour réaliser les algorithmes établis.

Par unicité on entend l'existence d'un procédé unique de réduction de la proposée à telle ou telle forme canonique. S'il existe d'autres procédés on les indiquera de même que les possibilités de transformation des abaques dans chacun d'eux. Pour utiliser ces résultats, il n'est pas indispensable de connaître la théorie de leur établissement. Ils deviennent donc immédiatement l'apanage de la pratique. Signalons que deux voies ont été proposées pour le problème de l'unicité, l'une le résolvant conjointement au problème de représentabilité, l'autre séparément.

Exemple 87. On a montré que si, moyennant certaines contraintes naturelles [6], une équation à trois variables est représentable par un abaque à points alignés constitué de deux échelles rectilignes et d'une échelle curviligne, cet abaque sera unique aux transformations projectives près. Donc tous les abaques à points alignés, représentatifs de la forme da Cauchy (6.14), seront projectifs l'un de l'autre.

Exemple 88. On connaît [29] deux procédés de réduction de l'équation (6.10) à la forme (13.33), représentable par un abaque à transparent orienté. Ces procédés sont

$$\left.\begin{aligned} f_{12} \pm \beta = f_{34} \pm \gamma = f_{56} \pm \delta, \\ \log g_{12} - \log \beta = \log g_{34} - \log \gamma = \log g_{56} - \log \delta, \end{aligned}\right\}$$

et

$$\left.\begin{aligned} f_{12} - \beta = f_{34} - \gamma = f_{56} - \delta, \\ (f_{12}^2 + g_{12}) - \beta^2 = (f_{34}^2 + g_{34}) - \gamma^2 = (f_{56}^2 + g_{56}) - \delta^2. \end{aligned}\right\}$$

Ici β, γ et δ sont des variables auxiliaires. L'unicité de la réduction de l'équation (6.10) à la forme (13.33), aux transformations admissibles près des abaques, n'ayant pas été résolue, il est encore prématuré d'affirmer qu'il n'existe pas de représentations autres que les deux indiquées.

Divers auteurs [6, 17, 20, 31] ont consacré un grand nombre de travaux à la représentabilité et l'unicité. Les articles [49, 104, 108] passent en revue les travaux consacrés aux problèmes théoriques de nomographie. Des comptes-rendus de travaux portant essentiellement sur la nomographie théorique sont publiés dans la revue « Matématika » dans le chapitre « Méthodes numériques ».

§ 14.6. Sur les liens des abaques avec les calculatrices

Comparaison de la solution nomographique et de la solution sur calculatrice d'un même problème. Si la proposée est représentable par un abaque dont la précision est suffisante, sa solution sera généralement plus avantageuse que les solutions sur machine qui se réduisent soit à un programme standard, soit à un tableau volumineux à plusieurs entrées.

Exemple 89. L'équation (6.43) qui donne la variable inconnue t comme une fonction de u, v et w est représentée par l'abaque à points alignés de la figure 2 sur lequel la réponse t est donnée par une application de la règle. La précision est suffisante pour ce problème.

En utilisant les calculatrices on peut obtenir deux solutions du même problème: composer un programme standard pour déterminer t avec trois paramètres variables ou dresser un tableau de valeurs de t à trois entrées. Il est aisé de voir que l'abaque de la figure 2 possède l'avantage de la suggestivité, de la simplicité et d'une résolution rapide sur le programme standard ou sur un tableau. L'avantage de l'abaque devient encore plus net s'il faut déterminer les variations de t en fonction de u, v et w. Sur l'abaque de la figure 2 ce problème demande quelques secondes et une simple translation de la règle.

A remarquer que l'abaque de la figure 2 est à résolution totale, i.e. chacune des variables t, u, v et w est susceptible d'être inconnue. Le programme standard est loin de jouir de cette propriété, quant à la résolution du problème inverse à l'aide du tableau, elle pose de grosses difficultés.

Application des calculatrices au calcul des abaques. Le calcul des coordonnées des points des échelles et des champs binaires peut

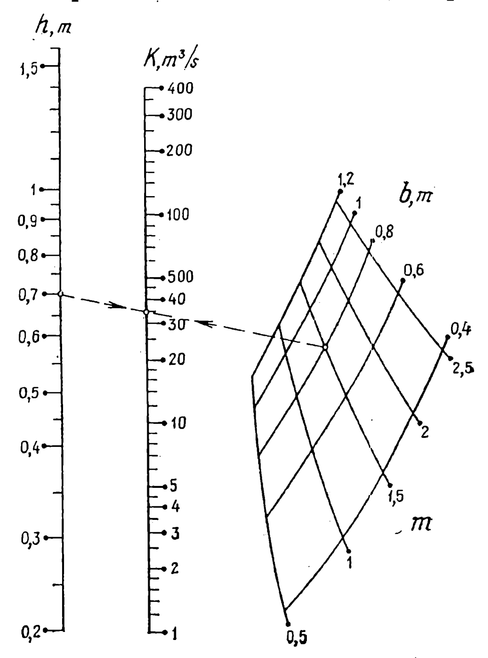


Fig. 301. Abaque approché de Tchébychev à points alignés pour la formule (14.16) calculé sur une calculatrice à l'aide d'un programme spécial

être confié à une machine. Programme standard, tableau et abaque peuvent être considérés comme des formes distinctes de la résolution à la machine.

Les calculatrices sont particulièrement efficaces pour le calcul des abaques approchés qui impliquent un grand nombre d'opérations.

Exemple 90. L'article [85] développe une méthode de construction d'*abaques approchés de Tchébychev* à échelles parallèles et champ binaire, représentatifs de relations à quatre variables, données par des formules ou des tableaux à trois entrées. La mise en œuvre de

cette méthode qui nécessite de gros calculs a été facilitée par la composition d'un programme spécial pour calculatrice [97, 98]. Elle est appliquée au calcul des tables de fonctions impliquées dans la relation approchée, des erreurs d'approximation et des coordonnées des points du champ binaire.

La figure 301 représente l'abaque approché de Tchébychev construit par cette méthode pour la formule

$$K = 50\,(bh + mh^2)\left(\frac{bh + mh^2}{b + 2\sqrt{1 + m^2}\,h}\right)^{0{,}223 - 0{,}031\sqrt{\frac{bh+mh^2}{b+2\sqrt{1+m^2}h}}}, \tag{14.16}$$

qui détermine le module du débit K dans un canal à profil en trapèze avec un coefficient de rugosité $n = 0{,}020$ dans la formule complète de N. Pavlovski pour un coefficient de Chezy C. Ici b est la largeur du canal au fond, m, le coefficient d'écartement des berges, h, la hauteur de l'eau. L'erreur relative maximale sur K ne dépasse pas 3 % dans les intervalles de variation des variables. La droite en pointillé figure la solution de l'exemple numérique: $h = 0{,}7$ m, $b = 0{,}8$ m, $m = 1{,}5$; réponse $K = 34$ m³/s.

Tracé automatique des abaques. L'application des calculatrices au tracé automatique des abaques ouvre une nouvelle voie à la nomographie. Un programme de calcul d'échelles [109] a été le premier résultat acquis. Il se distingue par un choix automatique de l'échelon. On a demandé uniquement les équations des échelles et les intervalles de variation des variables. Cette idée a été développée dans les travaux [110 à 118]. Un système de procédures a été mis au point pour tracer automatiquement les éléments des abaques (échelles et familles de lignes) au moyen d'une imprimante alphanumérique [110 à 113] et un traceur de courbes branché sur une calculatrice rapide [110, 114 à 118].

L'imprimante ne donne que les esquisses des abaques. De plus les échelles, familles de lignes et champs binaires sont délivrés sous forme de collection de points figurés par les symboles de l'imprimante. L'esquisse de l'abaque est mise en place à la main en reliant les points correspondants par des lignes auprès desquelles sont inscrites les cotes des points respectifs.

La construction des abaques est singulièrement simplifiée par l'emploi de traceurs de courbes branchés à une calculatrice. Dans ce cas le travail préliminaire de construction se réduit à une sélection du type d'abaque, au choix des paramètres de transformation et des fonctions arbitraires compte tenu des dimensions de l'épure, de l'erreur commise sur la solution et les intervalles de variation des variables, à l'écriture des équations des éléments de l'abaque et à la construction de son esquisse. Une fois en possession des équations des

éléments de l'abaque, des limites de variation des variables et de l'esquisse, on peut entamer la composition du programme pour tracer l'abaque à l'aide d'une calculatrice rapide couplée à un traceur de courbes. Le programme est écrit dans le langage ALGOL-60. Il renferme les équations des éléments de l'abaque, les limites de variation des variables, l'appel des procédures de construction automatique des éléments de l'abaque.

Les abaques construits avec des calculatrices rapides sont légèrement retouchés en raison de l'imperfection des procédures de construction automatique des éléments de l'abaque. Les abaques sont ensuites reproduits au calque.

Exemple 91. L'abaque de la figure 173 a été tracé pour la relation

$$w^2 = u^2 + v^2,$$

sur les intervalles $0 \leqslant u \leqslant 3$, $0 \leqslant v \leqslant 4$, $0 \leqslant w \leqslant 5$ à l'aide d'une calculatrice et d'un traceur de courbes. Les équations des éléments sont :

échelle u :

$$x = 0, \quad y = 18\, u^2;$$

échelle v :

$$x = 120, \quad y = 10\, v^2;$$

échelle w :

$$x = 77{,}1, \quad y = 6{,}43\, w^2.$$

L'algorithme est le suivant :

```
begin real x, y, u, v, w;
procedure uu u (u, x, y); begin x: = 0; y: = 18 × u ↑ 2 end;
procedure uu v (v, x, y); begin x: = 120; y: = 10 × v ↑ 2 end;
procedure uu w (w, x, y); begin x: = 77.1;  y: = 6.43 × w ↑
2 end;
нуст (1, 1, 150, — 20);
puk (0, 3, — 1, 1, uu); puk (0, 4, 1, 1, uv);
puk (0, 5, 1, 1, uv); bxy (150, 200) end.
```

Ici *uu*, *uv*, *uw* représentent les procédures de calcul des coordonnées x et y des échelles u, v, et w ; *нуст*, la procédure d'établissement de la plume qui sert à positionner l'origine des coordonnées ; *puk*, la procédure de calcul et de construction des échelles ; *bxy*, la procédure de retrait de la plume des limites de l'épure (*150* et *200* représentent les coordonnées du point de retrait de la plume). La construction de l'abaque a nécessité 62 s. Le programme n'a pas prévu l'inscription des symboles des échelles attribuées aux variables.

De nombreux abaques [43, 119 à 122] ont été construits avec des calculatrices et des traceurs de courbes. Une mention spéciale est à faire au travail [121] qui contient une série d'abaques représentatifs

d'un système complexe d'équations, dont la construction aurait été impossible sans la calculatrice et le traceur de courbes.

La mise au point de procédures pour la construction automatique des éléments des abaques à l'aide d'une calculatrice et d'un traceur de courbes laisse percer de réelles possibilités d'automatisation totale de la construction des abaques de divers types. Cette automatisation se traduit par : 1) la construction des abaques à la machine, i.e. la déduction des équations des éléments des abaques et la détermination des paramètres de transformation et des fonctions arbitraires impliqués ; 2) le calcul et le dessin des abaques. Le tracé préliminaire de l'esquisse devient superflu. Tout en disposant de la formule et du type d'abaque (représentatif de cette formule), des intervalles de variation des variables, de la variable de résolution et des limites de l'épure, on obtient l'abaque tout prêt.

Des algorithmes et des programmes ont été rédigés pour :

1) les abaques à points alignés représentatifs d'équations de la forme $f_1 + f_2 = f_3$, dont les supports des variables données sont coniques et dont le support de l'échelle de résolution est rectiligne et approche le mieux une échelle métrique ou logarithmique [123] ;

2) les abaques approchés à points alignés constitués de deux échelles curvilignes et d'une échelle de résolution rectiligne, représentant une relation donnée par un tableau à deux entrées [124] ;

3) les abaques à points alignés constitués d'une famille d'arcs et de deux échelles parallèles, représentatifs d'équations à trois variables [125] ;

4) les abaques adaptés à points équidistants, représentatifs de la forme $f_{12} = f_{34} + f_{35}$ [126] ;

5) les abaques à points alignés, représentatifs du système d'équations $f_3 = Af_1 + Bf_2$, $f_4 = Cf_1 + Df_2$, $f_5 = Ff_1 + Ff_2$ [127] ;

6) les abaques à points alignés, représentatifs de la forme $f_1f_3 + f_2g_3 + h_3 = 0$ [128] ;

7) les abaques à points alignés, représentatifs de la forme $f_1 + + f_2 = f_3$, constitués d'échelles parallèles ou concourantes lorsque l'échelle de résolution est proche d'une échelle métrique ou logarithmique [129] ;

8) les abaques au compas adaptés, représentatifs des formes $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$, $f_{12} + f_{13} = f_4 + f_5$, $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$ [130] ;

9) les abaques à points alignés constitués d'une famille d'arcs et de deux échelles parallèles pour un tableau à deux entrées [131].

Le trait remarquable des travaux énumérés est que les programmes qui ont été rédigés pour eux, moyennant quelques restrictions, délivrent l'abaque immédiatement après l'introduction des données initiales.

Exemple 92. La figure 302 représente un abaque à points alignés à échelles rectilignes pour l'équation

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$$

sur les intervalles $0,1 \leqslant u \leqslant 1$, $0,1 \leqslant v \leqslant 1$, $0,05 \leqslant w \leqslant 0,5$, dont l'échelle de résolution w est proche d'une échelle logarithmique. La droite en pointillé figure la solution de l'exemple numérique: $u = 0,24$, $v = 0,55$; réponse $w = 0,167$. L'abaque a été construit

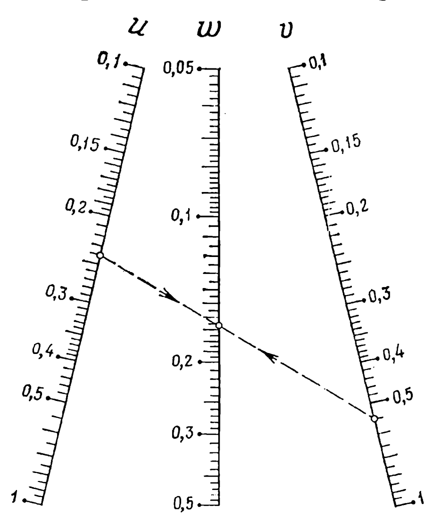


Fig. 302. Abaque à points alignés pour l'équation $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$ dont l'échelle de résolution w est proche d'une échelle logarithmique, construit à l'aide d'une calculatrice et d'un traceur de courbes selon un programme de construction automatique d'abaques à échelles rectilignes

à l'aide d'une calculatrice et d'un traceur de courbes d'après le programme rédigé pour la relation $f_1 + f_2 = f_3$ à laquelle s'apparente la proposée [129]. Le texte du programme est:

```
begin
real procedure f1 (u); f1: = 1/u;
real procedure f2 (v); f2: = 1/v;
real procedure f3 (w); f3: = 1/w;
array u1 [1:6] ц [1:3]; input (u1, ц);
N3p (.5, 1, u1, ц, f1, f2, f3)
end
◊2:
.1, 1, .1, 1, .05, .5;
74, 75, 76;
```

N3p (*.5*, *1*, *u1*, *ц*, *f1*, *f2*, *f3*) est la procédure réalisant la construction, le calcul et le tracé de l'abaque; *u1*, l'unité de stockage des limites de variation; *ц*, l'unité de stockage des chiffres représentant les dizaines des indices des échelles (ici les indices *74*, *75*, *76* correspondent à u, v, w). Dans la procédure *N3p* le chiffre *.5* représente le coefficient de similitude relativement à un cadre fixe de dimensions 250 × 200 mm, le chiffre *1* indique que l'échelle de résolution s'approche d'une échelle logarithmique.

Les problèmes relatifs à la nomographie sur machine sont traités plus en détail dans les travaux [132, 133].

Notons en conclusion que les abaques qui sont l'instrument de calcul scientifique le plus simple, le plus économique et le plus accessible, voient leur importance croître avec la pénétration des calculatrices dans tous les secteurs économiques. Cela s'explique d'un côté par le fait que les calculatrices offrent de vastes possibilités pour le calcul et la construction des abaques et de l'autre, par le fait que les calculatrices s'attaquant en principe aux problèmes les plus compliqués, ceux qui le sont moins sont résolus par les méthodes nomographiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. OCAGNE M. d'., Procédé nouveau de calcul graphique, Annales des Ponts et Chaussées, 8, sér. 6 (1884).
2. OCAGNE M. d'., Nomographie, Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application, Paris, 1891.
3. OCAGNE M. d'., Traité de nomographie, Paris, Gauthier-Villars, 1899, 1921.
4. OCAGNE M. d'., Esquisse d'ensemble de la nomographie, Paris, 1925.
5. ГЕРСЕВАНОВ Н.М., Основания номографического исчисления с приложением их к инженерному делу, часть I. В кн.: «Сборник института инженеров путей сообщения», вып. XXI, Петербург, 1906.
6. GRONWALL T. H., Sur les équations entre trois variables représentables par les nomogrammes à points alignés, Journal des Mathématiques pures et appliquées, 8, sér. 6 (1912), 59-102.
7. SOREAU R., Nomographie ou traité des abaques, Paris, E. Chiron, 1921.
8. MARGOULIS W., Les abaques à transparent orienté, C. R. 175 (1922), 1684-1686.
9. MARGOULIS W., Sur la théorie générale des équations représentables par des éléments mobiles, C. R. 176 (1923), 824-826.
10. MARGOULIS W., Les abaques à transparent orienté ou tournant, Paris, Gauthier-Villars, 1931.
11. LOPEZ NIETO A., Nomogramas baricentricos, Revista Matematica Hispano-Americana, 4a Serie XI, num. 3, 4 (1951).
12. URCELAJ I. M., Nomogramas romboidales, Gaceta Matemática (Madrid), la Serie III, num. 6 (1951), 183-194.
13. BELGRANO I. C., LOPEZ NIETO A., URCELAJ I. M., Tratado de nomografia, Madrid, Instituto Tecnico de la Construccion y del Gemento, 1953.
14. ГЕРСЕВАНОВ М. Н., Основы номографии. Теория и построение инженерных номограмм, изд. 2-е, М., ГТТИ, 1932.
15. МЕЛЕНТЬЕВ П. В., Номография, М., ГТТИ, 1933.
16. ГЛАГОЛЕВ Н. А., Теоретические основы номографии, М., ГТТИ, 1934.
17. Номографический сборник, М., ОНТИ, 1935.
18. Справочник по номографии (ред. Н. А. Глаголев), М., ОНТИ, 1937.
19. НЕВСКИЙ Б. А., Методика построения номограмм, М., ОНТИ, 1937.
20. Номография, Ученые записки МГУ, вып. 28, 1939.
21. ПЕНТКОВСКИЙ М. В., Номография, М. — Л., Гостехиздат, 1949.
22. НЕВСКИЙ Б. А., Справочная книга по номографии, М.— Л., Гостехиздат, 1951.
23. Номографический сборник, М., Изд-во МГУ, 1951.
24. ПЕНТКОВСКИЙ М. В., Скелеты номограмм уравнений третьего номографического порядка, М., Изд-во АН СССР, 1953.

25. ГЛАГОЛЕВ Н. А., Курс номографии, изд. 2-е, М., «Высшая школа», 1961.
26. ХОВАНСКИЙ Г. С., Номограммы с ориентированным транспарантом, М., Гостехиздат, 1957.
27. ХОВАНСКИЙ Г. С., Эффективный метод построения номограмм для произведения степенных функций, М., ВЦ АН СССР, 1959.
28. УЛАНОВСКИЙ В. П., ХОВАНСКИЙ Г. С., Интерполирование табличных функций многих переменных средствами численного и номографического представления, М., ВЦ АН СССР 1963.
29. ХОВАНСКИЙ Г. С., Методы номографирования, М., ВЦ АН СССР, 1964.
30. ХОВАНСКИЙ Г. С., Что такое номография, М., ВЦ АН СССР, 1969.
31. Номографические сборники: № 1, 1962; № 2, 1964; № 3, 1965; № 4, 1967; № 5, 1968; № 6, 1969; № 7, 1970; № 8, 1971; № 9, 1973; № 10, 1975; № 11, 1976; М., ВЦ АН СССР.
32. ХОВАНСКИЙ Г. С., Атлас номограмм для гидравлического расчета трапецеидальных каналов по полной формуле академика Н. Н. Павловского, М., Изд-во АН СССР, 1954.
33. ХОВАНСКИЙ Г. С., Номографические расчеты в гидравлике, М., Изд-во АН СССР, 1956.
34. ХОВАНСКИЙ Г. С., Номограмма для гидравлического расчета каналов трапецеидального, круглого и параболического профиля, М., ВЦ АН СССР, 1959.
35. ЛАПТЕВА Д. Г., Номограммы для гидравлического расчета лотков и канав, М., ВЦ АН СССР, 1960.
36. ХОВАНСКИЙ Г. С., Номограмма для линейной интерполяции, М., ВЦ АН СССР, 1962.
37. ХОВАНСКИЙ Г. С., Номограммы для гидравлического расчета дрен, М., ВЦ АН СССР, 1962.
38. УЛЬМАСОВ Н., Номограммы для гидравлического расчета канализационных сетей, М., ВЦ АН СССР, 1964.
39. ДЕРЮГИН В. Ф., ЧОРБАДЖИЕВ Д. П., Детальный расчет конденсаторов паровых турбин на аналоговых вычислительных машинах с использованием номограмм, М., ВЦ АН СССР, 1965.
40. ХОВАНСКИЙ Г. С., Номограммы для квадратичной интерполяции, М., ВЦ АН СССР, 1967.
41. ЛАПТЕВА Д. Г., Номограммы для расчета плоского потока при установившемся неравномерном движении грунтовых вод, М., ВЦ АН СССР, 1967.
42. ГУСЕВ С. И., ХОВАНСКИЙ Г. С., Номограммы для расчета горизонтального дренажа, М., ВЦ АН СССР, 1972.
43. БОРИСОВ С. Н., Сборник номограмм из равноудаленных точек для гидравлического расчета газопроводов, М., ВЦ АН СССР, 1973.
44. МАХОВА В. М., Номография в ЧССР, В кн.: «Номографический сборник № 2», М., ВЦ АН СССР, 1964, 12-15.
45. PLESKOT V., Nomografické metody, Sbornik teoretickych stati a praktických aplikaci, Praha, ČSAV, 1962.
46. ХОВАНСКИЙ Г. С., Конференция по номографии в Остраве, В кн.: «Номографический сборник № 3», М., ВЦ АН СССР, 1965, 3-6.
47. GALAJDA P., Nomograficky zbornik (zbornik prednašok III. Celoštatnej konferencie o nomorgrafii), VŠT, Košice, 1970.
48. Первая межвузовская номографическая конференция (программа и тезисы докладов), Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской и Вычислительный центр АН СССР, М., ВЦ АН СССР, 1965.
49. БАХВАЛОВ С. В., Номография, В сб.: «Математика в СССР за 40 лет», М. — Л., Гостехиздат, 1958.
50. Сборник библиографических работ в помощь библиотекам. Техника.

1966 (Номография, графические методы вычислений и их применение в различных отраслях науки и техники), Л., Гос. ордена Трудового Красного Знамени публичная библиотека им. М. Е. Салтыкова-Щедрина, Справочно-библиографический отдел, 1967.
51. ХОВАНСКИЙ Г. С., Прикладные вопросы номографии, В кн.: «Труды московского научно-методического семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. III», Московский ордена Ленина авиационный институт им. Серго Орджоникидзе, Труды института, вып. 242, М., 1972, 92-117.
52. Mustermappe, Schäfers Feinpapier. Papierverarbeitung und Verlag, Plauen i. V, s. a.
53. УСАНОВ Ф. И., Номографическая техника, В кн.: «Номографический сборник № 4», М., ВЦ АН СССР, 1967, 9-19.
54. АРОНЧИК Б. Д., Методика конструирования счетных линеек с одним движком для зависимостей вида $f_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}$, В кн.: «Номографический сборник № 8», М., ВЦ АН СССР, 1971, 127-134.
55. АРОНЧИК Б. Д., Номографические конструкции с двойными шкалами для зависимостей вида $f_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}$, В кн.: «Номографический сборник № 10», М., ВЦ АН СССР, 1975, 138-145.
56. ДЕНИСЮК И. Н., Номография и составление эмпирических формул, В кн.: «Справочник нормировщика-машиностроителя», т. 1, М., Машгиз, 1959, 545-627.
57. ХОВАНСКИЙ Г. С., Прямолинейный график функции в бинарном поле и его использование для чебышевской аппроксимации функций и приближенного номографирования, В кн.: «Номографический сборник № 9», М., ВЦ АН СССР, 1973, 137-151.
58. ХОВАНСКИЙ Г. С., Применение номограмм для исследования экстремальных свойств функциональных зависимостей, В кн.: «Номографический сборник № 2», М., ВЦ АН СССР, 1964, 76-102.
59. ГУСЕВ С. И., ХОВАНСКИЙ Г. С., ШЕЙНКИН Г. Ю., Номографический метод решения одной оптимальной задачи по расчету дождевальных систем, В кн.: «Номографический сборник № 8», М., ВЦ АН СССР, 1971, 54-63.
60. ГУСЕВ С. И., ХОВАНСКИЙ Г. С., ШЕЙНКИН Г. Ю., Два номографических метода решения экстремальной задачи по расчету стационарной дождевальной системы, В кн.: «Номографический сборник № 9», М., ВЦ АН СССР, 1973, 35-45.
61. ГУСЕВ С. И., НИКУЛИН С. Н., ХОВАНСКИЙ Г. С., Номографический метод определения оптимальных параметров дождевальной машины «Фрегат», В кн.: «Номографический сборник № 10», М., ВЦ АН СССР, 1975, 19-24.
62. ХОВАНСКИЙ Г. С., Графический способ построения приближенных номограмм из выравненных точек для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными и тремя параметрами, В кн.: «Номографический сборник № 1», М., ВЦ АН СССР, 1962, 115-121.
63. НОВОБРАНОВА Р. И., Приведение общего уравнения третьего номографического порядка к каноническим формам, В кн.: «Номографический сборник № 9», М., ВЦ АН СССР, 1973, 86-91.
64. КУЗЬМИН Е. Н., Решение проблемы общей анаморфозы для уравнения третьего номографического порядка, В кн.: «Номографический сборник № 1», М., ВЦ АН СССР, 1962, 192-204.
65. ХОВАНСКИЙ Г. С., Гидравлический расчет параболических каналов с помощью номограмм, Инженерно-физический журнал, № 2 (1959), 113-117.
66. DAVIS D. S., Nomography and empirical equations, 2. ed., New Jork, Reinhold, 1962.
67. УЛЬМАСОВ Н., Номограмма из выравненных точек для решения одного

трансцендентного уравнения с тремя параметрами, В кн.: «Номографический сборник № 1», М., ВЦ АН СССР, 1962, 39-44.
68. БОРИСОВ С. Н., ЛАПТЕВА Д. Г., ХОВАНСКИЙ Г. С., Приближенные составные сетчатые номограммы для уравнений с четырьмя переменными, В кн.: «Номографический сборник № 6», М., ВЦ АН СССР, 1969, 119-132.
69. АРОНЧИК Б. Д., Пространственное преобразование составных сетчатых номограмм для зависимостей вида $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = 0$, В кн.: «Номографический сборник № 4», М., ВЦ АН СССР, 1967, 33-50.
70. ХОВАНСКИЙ Г. С., Приспособляемые номограммы из равноудаленных точек, В кн.: «Номографический сборник № 4», М., ВЦ АН СССР, 1967, 95-134.
71. ХОВАНСКИЙ Г. С., Номографические методы приближенного представления функций одной и двух переменных, В кн.: «Номографический сборник № 2», М., ВЦ АН СССР, 1964, 91-102.
72. РОМАНОВ С. А., ХОВАНСКИЙ Г. С., О представлении некоторых зависимостей номограммами с транспарантом, имеющим одну степень свободы перемещения, В кн.: «Номографический сборник № 8», М., ВЦ АН СССР, 1971, 158-166.
73. КОЗЛОВА Е. Г., Метод повторения вспомогательных переменных в номограммах с ориентированным транспарантом и с транспарантом, имеющим одну степень свободы перемещения, В кн.: «Номографический сборник № 10», М., ВЦ АН СССР, 1975, 146-175.
74. ЛАПТЕВА Д. Г., О номографировании зависимостей с несколькими комплексными переменными, В кн.: «Номографический сборник № 5», М., ВЦ АН СССР, 1968, 93-113.
75. ПОТЕТЮНКО Г. Н., ЧЕРНЫШЕВ К. Р., Номограмма с ориентированным транспарантом для зависимости с комплексными переменными, встречающейся при расчете сегнетоэлектриков, В кн.: «Номографический сборник № 6», М., ВЦ АН СССР, 1969, 6-11.
76. ЛАПТЕВА Д. Г., К вопросу о номографировании зависимостей с несколькими комплексными переменными, В кн.: «Номографический сборник № 7», М., ВЦ АН СССР, 1970, 32-41.
77. ЛАПТЕВА Д. Г., О номографировании общих уравнений третьего и четвертого номографического порядка в комплексной области, В кн.: «Номографический сборник № 9», М., ВЦ АН СССР, 1973, 92-113.
78. МАЛЮСОВА М. М., МАСЛЕННИКОВ Н. А., ХОВАНСКИЙ Г. С., Скорость прироста бактерий метанового брожения, «Водоснабжение и санитарная техника», № 4, (1959), 36-38.
79. ХОВАНСКИЙ Г. С., Некоторые вопросы практической номографии, В сб.: «Вычислительная математика», № 4, М., Изд-во АН СССР, 1959, 3-103.
80. ЧОРБАДЖИЕВ Д. П., Применение номограмм с ориентированным транспарантом для определения параметров эмпирических формул, В кн.: «Номографический сборник № 6», М., ВЦ АН СССР, 1969, 60-82.
81. ПОТЕТЮНКО Г. Н., Номографические методы определения по опытным данным параметров функциональных зависимостей, Атомная энергия 33, вып. 2 (1972), 689-699 (депонированная статья № 600/6696).
82. ХОВАНСКИЙ Г. С., Исследование некоторых способов номографирования формы $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$ и ее частных случаев, В кн.: «Номографический сборник № 9», М., ВЦ АН СССР, 1973, 63-85.
83. ЛАПТЕВА Д. Г., Сопоставление методов номографирования уравнения $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 0$, В кн.: «Номографический сборник № 4», М., ВЦ АН СССР, 1967, 51-64.
84. СМИРНОВ С. В., ХОВАНСКИЙ Г. С., Сравнение некоторых способов приближенного номографирования, В кн.: «Номографический сборник № 4», М., ВЦ АН СССР, 1967, 201-219.

85. УМАРОВ Ф., ХОВАНСКИЙ Г. С., Методика построения приближенных номограмм из выравненных точек типа Коши для зависимостей с четырьмя переменными, В кн.: «Номографический сборник № 8», М., ВЦ АН СССР, 1971, 85-93.
86. УЛАНОВСКИЙ В. П., ХОВАНСКИЙ Г. С., Номографирование линейных зависимостей с двумя и тремя переменными, В кн.: «Номографический сборник № 2», М., ВЦ АН СССР, 1964, 124-132.
87. ЕВСТАФЬЕВ Н. В., О номографировании одной таблицы с двумя входами, В кн.: «Номографический сборник № 6», М., ВЦ АН СССР, 1969, 3-5.
88. ХОВАНСКИЙ Г. С., СИЛАЕВА Е. А., Номографирование обобщенных уравнений третьего и четвертого номографического порядка и формул последовательной линейной интерполяции в таблицах с тремя и четырьмя входами, В кн.: «Номографический сборник № 9», М., ВЦ АН СССР, 1973, 114-136.
89. ГОРОДСКИЙ М., О приближенном построении номограмм из выравненных точек для уравнений произвольного вида, Ученые записки МГУ, Номография, вып. 28 (1939), 15-19.
90. ДЕНИСЮК И. Н., Аналитические методы приближенной корреляции и соответствующие функциональные задачи, Ученые записки МГУ, вып. 28, 1939, 27-42.
91. ДЕНИСЮК И. Н., Об одном типе номограмм и его приближенном построении, В кн.: «Номографический сборник», Изд-во МГУ, М., 1951, 80-85.
92. ПЕНТКОВСКИЙ М. В., Приближенные номограммы первого жанра, Изв. АН Казах. ССР, вып. 7 (1959), 3-39.
93. ХОВАНСКИЙ Г. С., Графический метод построения приближенных номограмм из выравненных точек с минимизацией погрешности, В кн.: «Номографический сборник № 5», М., ВЦ АН СССР, 1968, 86-95.
94. ХОВАНСКИЙ Г. С., Приближенные составные шкальные номограммы из выравненных точек для уравнений с четырьмя переменными, В кн.: «Номографический сборник № 6», М., ВЦ АН СССР, 1969, 133-142.
95. ХОВАНСКИЙ Г. С., Приближенные составные номограммы из выравненных точек для уравнений со многими переменными, В кн.: «Номографический сборник № 7», М., ВЦ АН СССР, 1970, 60-65.
96. ХОВАНСКИЙ Г. С., О построении точных и приближенных составных сетчатых номограмм и их частных случаев — номограмм из выравненных и равноудаленных точек, В кн.: «Номографический сборник № 7», М., ВЦ АН СССР, 1970, 66-78.
97. УМАРОВ Ф., Расчет на ЭЦВМ приближенных номограмм из выравненных точек типа Коши для таблиц с тремя входами, В кн.: «Номографический сборник № 9», М., ВЦ АН СССР, 1973, 152-158.
98. УМАРОВ Ф., Решение задачи о представлении таблицы с тремя входами приближенной чебышевской номограммой из выравненных точек с двумя параллельными шкалами и полем, Инф. бюлл.: «Алгоритмы и программы», вып. 2 (Материалы гос. фонда алгоритмов и программ), М., ВНТИЦентр, 1973.
99. СМИРНОВ С. В., ПОТАПОВ М. К., Равномерные приближения и наилучшее построение шкал номограммы, В кн.: «Номографический сборник № 4», М., ВЦ АН СССР, 1967, 179-200.
100. МОЧАЛИНА Л. В., О применении ЭЦВМ для расчета криволинейной шкалы номограммы первого жанра по методу Смирнова-Потапова, В кн.: «Номографический сборник № 6», М., ВЦ АН СССР, 1969, 101-108.
101. МОЧАЛИНА Л. В., Об улучшении приближенной номограммы первого жанра путем последовательного перестроения ее шкал, В кн.: «Номографический сборник № 6», М., ВЦ АН СССР, 1969, 109-118.

102. ЧОРБАДЖИЕВ Д. П., Приблизително построяване на номограми от типа на Коши с едно бинерно поле за уравнения с четири променливи, неразрешими относно отговорната променлива, Год. на ВТУЗ, Математика, т. V, кн. 1, 1968/69. ДИ «Техника», София, 1971, 65-76.
103. ЧОРБАДЖИЕВ Д. П., Построяване на приблизителни номограми за зависимости с повече от три променливи, Год. на ВТУЗ, Математика, т. VII, кн. 1, 1971, «Техника», 153-171.
104. ХОВАНСКИЙ Г. С., Номография за десять лет, В кн.: «Алгебра, логика и вычислительная математика», Межвузовский сборник, ИвГУ, Иваново, 1976, 3-24.
105. ХЕЙНМАН В. Б., О построении приближенных номограмм для кривой распределения Пирсона 3-го типа, В кн.: «Номографический сборник № 6», М., ВЦ АН СССР, 1971, 70-84.
106. КРИЦКИЙ С. Н., МЕНКЕЛЬ М. Ф., Гидрологические основы речной гидротехники, М. — Л., Изд-во АН СССР, 1950.
107. БЕЛЯКОВ В. М., КРАВЦОВА Р. П., РАППОПОРТ М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, том 1, М., Изд-во АН СССР, 1962.
108. БОГОЛЮБОВ Ю. И., О представлении уравнений и систем уравнений номограммами с ориентированным транспарантом, В кн.: «Алгебра, логика и вычислительная математика», Межвузовский сборник, ИвГУ, Иваново, 1976, 25-41.
109. БОРИСОВ С. Н., Автоматизация расчета шкал номограмм, В кн.: «Номографический сборник № 2», М., ВЦ АН СССР, 1964, 85-90.
110. ЧИБИСОВ В. В., Автоматизация построения номограмм и графиков функций, Автореферат дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, М., ВЦ АН СССР, 1972.
111. ЧИБИСОВ В. В., Применение широкоформатной печати ЭЦВМ для построения эскизов номограмм, В кн.: «Номографический сборник № 8», М., ВЦ АН СССР, 1971, 135-144.
112. ЧИБИСОВ В. В., Автоматизация расчета и построения шкал на ЭЦВМ с использованием АЦПУ, Инф. бюлл.: «Алгоритмы и программы», вып. 1 (Материалы гос. фонда алгоритмов и программ), М., ВИНИТИ, 1971.
113. ЧИБИСОВ В. В., Построение номограмм на АЦПУ машины БЭСМ-6 с автоматическим выбором шага, В кн.: «Номографический сборник № 9», М., ВЦ АН СССР, 1973, 159-168.
114. ЧИБИСОВ В. В., Вычерчивание и оформление номограмм на графопостроителе, подключенном к машине БЭСМ-6, В кн.: «Номографический сборник № 9», М., ВЦ АН СССР, 1973, 169-176.
115. ЧИБИСОВ В. В., Использование графопостроителя КАЛЬКОМП-763 на машине БЭСМ-6 ВЦ АН СССР, В сб.: «Обработка информации в системе человек-машина», М., ВЦ АН СССР, 1973.
116. ЧИБИСОВ В. В., Система процедур нижнего уровня на языке АЛГОЛ-60 для подключения графопостроителя к машине БЭСМ-6, Инф. бюлл.: «Алгоритмы и программы», вып. 1 (Материалы гос. фонда алгоритмов и программ), М., ВНТИЦентр, 1973.
117. ЧИБИСОВ В. В., Вычерчивание и оформление графиков функций одной переменной на графопостроителе, подключенном к БЭСМ-6, Инф. бюлл.: «Алгоритмы и программы», вып. 1 (Материалы гос. фонда алгоритмов и программ), М., ВНТИЦентр, 1973.
118. ЧИБИСОВ В. В., Построение и оформление на графопостроителе шкал и семейств линий, заданных параметрическими уравнениями, Инф. бюлл.: «Алгоритмы и программы», вып. 1 (Материалы гос. фонда алгоритмов и программ), М., ВНТИЦентр, 1973.
119. КРЕНКЕ А. Н., ХОВАНСКИЙ Г. С., Расчет протяженности зон льдообразования на ледниках в нестационарных условиях. Материалы гля-

циологических исследований , вып. 23, Секция гляциологии Междуведомственного Геофизического Комитета, М., 1974, 25-34.
120. БОРИСОВ С. Н., Номографический метод решения задачи Штейнера, В кн.: «Номографический сборник № 10», М., ВЦ АН СССР, 1975, 31-43.
121. ЛЯШЕНКО О. Н., Сборник номограмм для расчета синхронной работы автогенераторов, М., ВЦ АН СССР, 1975.
122. Оптимальные параметры элементов оросительных систем при поливе дождеванием, Обзорная информация № 2, М., 1976, ЦБНТИ Минводхоза СССР.
123. БОРИСОВ С. Н., ЧИБИСОВ В. В., Конструирование и вычерчивание номограмм второго жанра для уравнения вида $f_1 + f_2 = f_3$ с использованием ЭЦВМ, В кн.: «Номографический сборник № 10», М., ВЦ АН СССР, 1975, 54-62.
124. ЧИБИСОВ В. В., Об одном методе расчета на ЭЦВМ приближенной номограммы второго жанра из выравненных точек с заданной ответной шкалой, В кн.: «Номографический сборник № 10», М., ВЦ АН СССР, 68-75.
125. ЧИБИСОВ В. В., Построение номограмм из выравненных точек с семейством дужек и двумя параллельными шкалами с помощью ЭЦВМ и графопостроителя, В кн.: «Номографический сборник № 10», М., ВЦ АН СССР, 1975, 63-67.
126. БОРИСОВ С. Н., Автоматизация конструирования номограмм из равноудаленных точек для уравнения $f_{12} = f_{34} + f_{35}$, В кн.: «Номографический сборник № 11», М., ВЦ АН СССР, 1976, 71-79.
127. ЛАПТЕВА Д. Г., Автоматизация построения номограмм из выравненных точек с параллельными шкалами для системы уравнений $f_3 = Af_1 + Bf_2$, $f_4 = Cf_1 + Df_2$, $f_5 = Ef_1 + Ff_2$, В кн.: «Номографический сборник № 11», М., ВЦ АН СССР, 1976, 66-70.
128. БОРИСОВ С. Н., Автоматизация конструирования шкальных номограмм типа Коши, Инф. бюлл.: «Алгоритмы и программы», вып. 2 (Материалы гос. фонда алгоритмов и программ), М., ВНТИЦентр, 1976.
129. БОРИСОВ С. Н., Автоматизация конструирования номограмм нулевого жанра для уравнения $f_1 + f_2 = f_3$, Инф. бюлл.: «Алгоритмы и программы», вып. 2 (Материалы гос. фонда алгоритмов и программ), М., ВНТИЦентр, 1977.
130. БОРИСОВ С. Н., Автоматизация конструирования циркульных номограмм, Инф. бюлл.: «Алгоритмы и программы», вып. 3 (Материалы гос. фонда алгоритмов и программ), М., ВНТИЦентр, 1977.
131. БОРИСОВ С. Н., Алгоритмы конструирования номограмм с контактом касания для таблиц с двумя входами, Инф. бюлл.: «Алгоритмы и программы», вып. 2 (Материалы гос. фонда алгоритмов и программ), М., ВНТИЦентр, 1977.
132. БОРИСОВ С. Н., Машинная номография, В кн.: «Алгебра, логика и вычислительная математика», Межвузовский сборник, ИвГУ, Иваново, 1976, 45-61.
133. ХОВАНСКИЙ Г. С., Номография и ее возможности, М., Изд-во «Наука», 1977.

LISTE DES FORMES CANONIQUES

Formes canoniques pour les abaques simples

1. Echelles accolées :

a) une échelle accolée :

$$\beta = F(\alpha), \qquad \text{(fig. 70)}; \quad (3.1)$$

b) système d'échelles accolées :

$$f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = f_n, \qquad \text{(fig. 75)}. \quad (3.24)$$

2. Abaques à entrecroisement :

a) général :

$$F(u, v, w) = 0, \qquad \text{(fig. 76)}; \quad (4.1)$$

b) rectiligne :

$$\frac{f_2 - f_1}{g_2 - g_1} = \frac{f_3 - f_1}{g_3 - g_1}, \qquad \text{(fig. 78)}; \quad 4.11)$$

c) cartésien rectiligne :

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0, \qquad \text{(fig. 85)}. \quad (4.22)$$

3. Abaques à points alignés :

a) à échelles pour les équations:

$$\frac{f_2 - f_1}{g_2 - g_1} = \frac{f_3 - f_1}{g_3 - g_1}, \qquad \text{(fig. 107)}, \quad (6.5)$$

$$f_1 + f_2 = f_3, \qquad \text{(fig. 123)}, \quad (6.11)$$

$$f_1 = f_2 f_3, \qquad \text{(fig. 132)} \quad (6.12)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = f_1 f_2 f_3, \qquad (6.13)$$

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0, \qquad \text{(fig. 109)}, \quad (6.14)$$

$$f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2) g_3 + h_3 = 0, \qquad (6.15)$$

$$f_3 = \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}, \qquad \text{(fig. 145)}, \quad (6.16)$$

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}, \qquad (6.17)$$

$$\frac{F_3}{F_1} + \frac{G_3}{F_2} = 1, \qquad \text{(fig. 108)}, \quad (6.18)$$

$$Af_1f_2f_3+B_1f_2f_3+B_2f_3f_1+B_3f_1f_2+C_1f_1+C_2f_2+C_3f_3+D=0, \qquad (6.19)$$

$$w=Auv+Bu+Cv+D, \qquad \text{(fig. 134)}, \quad (6.20)$$

$$(l_0f_1f_2+l_1f_1+l_2f_2+l_3)\,f_3+(m_0f_1f_2+m_1f_1+m_2f_2+m_3)\,g_3+$$
$$+(n_0f_1f_2+n_1f_1+n_2f_2+n_3)\,h_3=0\,; \qquad (6.21)$$

b) à champs binaires :

$$\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}=\frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}, \qquad \text{(fig. 61 et 120)}, \quad (6.4)$$

$$f_1f_{34}+f_2g_{34}+h_{34}=0, \qquad \text{(fig. 139)}, \quad (6.22)$$

$$\frac{F_{34}}{F_1}+\frac{G_{34}}{F_2}=1, \qquad \text{(fig. 138)}, \quad (6.23)$$

$$f_1f_2f_{34}+(f_1+f_2)\,g_{34}+h_{34}=0, \qquad \text{(fig. 143)}, \quad (6.24)$$

$$f_4=\frac{f_1+f_{23}}{g_1+g_{23}}, \qquad (6.25)$$

$$f_5=\frac{f_{12}+f_{34}}{g_{12}+g_{34}}, \qquad (6.26)$$

$$(l_0f_1f_2+l_1f_1+l_2f_2+l_3)\,f_{34}+(m_0f_1f_2+m_1f_1+m_2f_2+m_3)\,g_{34}+$$
$$+(n_0f_1f_2+n_1f_1+n_2f_2+n_3)\,h_{34}=0, \qquad (6.27)$$

$$t=Auvw+Buv+Cvw+Dwu+Eu+Fv+Gw+H, \qquad (6.28)$$

$$\varphi(u,\ v)=\psi(w,\ t), \qquad \text{(fig. 181)}, \quad (8.2)$$

$$F(u,\ v,\ w)=0, \qquad \text{(fig. 87)}\,; \quad (4.1)$$

c) à contacts tangentiels et à contacts mixtes :

$$F(u,\ v,\ w)=0, \qquad \text{(fig. 98, 102, 104)}\,; \quad (4.1)$$

d) pour les systèmes d'équations :

$$\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{14}-g_{12}}=\frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}=\ldots=\frac{f_{n-1,\,n}-f_{12}}{g_{n-1,\,n}-g_{12}}, \qquad (3.11), \quad (6.6)$$

$$\left.\begin{aligned} f_3(w)&=Af_1(u)+Bf_2(v),\\ f_4(t)&=Cf_1(u)+Df_2(v), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(fig. 125)}, \quad (6.29)$$

$$\left.\begin{aligned} w&=a_1+b_1u+c_1v,\\ t&=a_2+b_2u+c_2v, \end{aligned}\right\} \qquad (6.30)$$

$$\left.\begin{aligned} w&=a_1u^{b_1}v^{c_1},\\ t&=a_2u^{b_2}v^{c_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.31)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(u)+f_2(v)&=f_3(w),\\ f_{12}(u,\ v)&=f_4(t), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(fig. 130)}. \quad (6.32)$$

4. Abaques à points équidistants :
a) pour les équations :

$$(f_{34}-f_{12})^2+(g_{34}-g_{12})^2=(f_{56}-f_{12})^2+(g_{56}-g_{12})^2, \qquad \text{(fig. 269)}, \quad (12.1)$$

$$f_1f_{34}+f_2g_{34}+h_{34}=0, \qquad \text{(fig. 270)}, \quad (12.2)$$

$$F(u,\ v,\ w)=0, \qquad \text{(fig. 88)}, \quad (4.1)$$

$\varphi(u, v) = \psi(w, t)$, (fig. 182), (8.2)

$f_{12} = f_{34} + f_{35}$, (fig. 204, 218), (8.20), (9.1)

$f_1 = f_2 + f_3$, (fig. 219), (9.2)

$f_{14} = f_{24} + f_{34}$, (fig. 222), (9.3)

$f_{12} = f_3 + f_4$, (fig. 224), (9.4)

$f_1 + f_2 = f_3 + f_4$, (fig. 224), (9.5)

$f_{12} = f_{34} + f_5$, (fig. 218), (9.6)

$f_1 + f_2 = f_3 + f_4 + f_5$; (9.7)

b) pour le système d'équations :

$f_{12} = f_{34} + f_{35} = f_{67} + f_{68} = \ldots = f_{n-2,\, n-1} + f_{n-2,\, n}$, (9.15)

$f_{12} = f_{34} + f_{35} = f_{67} + f_{68}$. (9.16)

5. Abaques au compas :

a) pour les équations :

$(f_{34} - f_{12})^2 + (g_{34} - g_{12})^2 = (f_{78} - f_{56})^2 + (g_{78} - g_{56})^2$, (fig. 271), (12.5)

$f_{12} + F_5(g_{12}, \alpha_5) = f_{34} + F_6(g_{34}, \alpha_6)$, (13.19)

$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$, (fig. 210, 232), (8.25), (10.1)

$f_{12} = f_3$, (fig. 233), (10.2)

$f_1 = f_2 + f_3$, (fig. 234), (10.3)

$f_{12} = f_{34}$, (fig. 236), (10.4)

$f_{12} + f_{13} = f_4$, (fig. 237), (10.5)

$f_{12} = f_3 + f_4$, (fig. 238), (10.6)

$f_1 + f_2 = f_3 + f_4$, (fig. 239), (10.7)

$f_{12} = f_{34} + f_{35}$, (fig. 241), (10.8)

$f_{12} + f_{13} = f_4 + f_5$, (fig. 242), (10.9)

$f_1 + f_2 + f_3 = f_4 + f_5$, (fig. 243), (10.10)

$f_{12} + f_3 = f_{45} + f_6$, (fig. 232), (10.11)

$f_{12} + f_3 = f_4 + f_5 + f_6$, (fig. 244), (10.12)

$f_1 + f_2 + f_3 = f_4 + f_5 + f_6$, (fig. 232); (10.13)

b) pour les systèmes d'équations :

$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46} = \ldots = f_{n-5,\, n-4} + f_{n-5,\, n-3} = f_{n-2,\, n-1} + f_{n-2,\, n}$, (10.17)

$f_{12} + f_3 = f_{14} + f_5 = \ldots = f_{1,\, n-1} + f_n$, (10.18)

$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46} = f_{78} + f_{79}$, (fig. 246), (10.19)

$f_{12} + f_3 = f_{14} + f_5 = f_{16} + f_7$, (fig. 247), (10.20)

$$\left.\begin{aligned} f_{12} - f_{56} &= f_{34} - f_{78}, \\ g_{12} &= g_{56}, \\ g_{34} &= g_{78}, \end{aligned}\right\}$$ (fig. 286). (13.13)

6. Abaques barycentriques :
a) pour l'équation :

$$f_5 = F(f_{12} + f_{34},\quad g_{12} + g_{34}); \qquad (11.10)$$

b) pour les systèmes d'équations :

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} + f_{34} = f_{56}, \\ g_{12} + g_{34} = g_{56}, \end{array}\right\} \qquad \text{(fig. 255)}, \quad (11.3)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} = f_3 + f_{45}, \\ g_{12} = g_{36} + g_4, \end{array}\right\} \qquad \text{(fig. 261)}, \quad (11.6)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} = f_3, \\ g_{12} = g_4, \end{array}\right\} \qquad \text{(fig. 262)}, \quad (11.7)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} = f_3 + f_4, \\ g_{12} = g_{35}, \end{array}\right\} \qquad \text{(fig. 263)}. \quad (11.8)$$

7. Abaques rhomboïdaux :
a) pour l'équation :

$$f_7 = F(f_{12} + f_{34} + f_{56},\quad g_{12} + g_{34} + g_{56}); \qquad (11.22)$$

b) pour le système d'équations :

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} - f_{56} = f_{34} - f_{78}, \\ g_{12} - g_{56} = g_{34} - g_{78}, \end{array}\right\} \qquad \text{(fig. 267)}. \quad (11.19)$$

8. Abaques à index parallèle et en équerre :

$$\frac{f_{34} - f_{12}}{g_{34} - g_{12}} = \frac{f_{78} - f_{56}}{g_{78} - g_{56}}, \qquad \text{(fig. 272 et 273)}, \quad (12.6)$$

$$f_{56} = \frac{f_{34} - f_{12}}{g_{34} - g_{12}}, \qquad (12.7)$$

$$f_1 f_{34} + g_{34} = f_2 f_{56} + g_{56}, \qquad (12.8)$$

$$f_1 - f_2 = f_3 - f_4, \qquad (12.9)$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_3}{f_4}. \qquad (12.10)$$

9. Abaques à un degré de liberté de translation du transparent :
a) pour les équations :

$$f_{12} + F_5(g_{12}, \alpha_5) = f_{34} + F_6(g_{34}, \alpha_6), \qquad \text{(fig. 285)}, \quad (13.19)$$

$$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}, \qquad \text{(fig. 217)}, \quad (8.25)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0, \qquad \text{(fig. 35)}, \quad (2.2)$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0; \qquad (2.6)$$

b) pour les systèmes d'équations :

$$\left.\begin{array}{l} f_{2k-1,\,2k} = f_{2k-1+2n,\,2k+2n} + a, \\ g_{2k-1,\,2k} = g_{2k-1+2n,\,2k+2n}, \\ k = 1, 2, \ldots, n, \end{array}\right\} \qquad (13.12)$$

$$\left.\begin{array}{l} {}_{12} - f_{56} = f_{34} - f_{78}, \\ g_{12} = g_{56}, \\ g_{34} = g_{78}. \end{array}\right\} \qquad (13.13)$$

10. Abaques à transparent orienté :
a) pour les équations :

$s = P(t, \Phi(w, \varphi(u, v)))$, (fig. 191), (3.9)

$f_{12} = F(f_{34}, f_{56})$, (fig. 199), (8.14)

$f_{12} = f_{34} + f_{56}$, (fig. 202), (8.19)

$f_{12} = f_{34} + f_{35}$, (fig. 204 et 205), (8.20)

$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$, (fig. 215), (8.25)

$f_{12} + f_{34} + f_{56} = f_7 + f_8 + f_9$, (13.31)

$f_7 = F(f_{12} + f_{34} + f_{56}, \; g_{12} + g_{34} + g_{56})$, (13.29)

$f_{12} + F(\alpha_3, g_{12}) + f_4 = 0$, (fig. 291), (13.39)

$f_{12} + g_{12} g_{34} + f_{34} = 0$, (fig. 293), (13.40)

$$\begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & 1 \\ f_{34} & g_{34} & 1 \\ f_{56} & g_{56} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (§ 14.5), \quad (6.10)$$

b) pour les systèmes d'équations :

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} - f_{1+2n,\,2+2n} = f_{2k-1,\,2k} - f_{2k-1+2n,\,2k+2n}, \\ g_{12} - g_{1+2n,\,2+2n} = g_{2k-1,\,2k} - g_{2k-1+2n,\,2k+2n}, \\ k = 2, \ldots, n, \end{array}\right\} \quad \text{(fig. 279)}, \quad (13.27)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} - f_{78} = f_{34} - f_{9,\,10} = f_{56} - f_{11,\,12}, \\ g_{12} - g_{78} = g_{34} - g_{9,\,10} = g_{56} - g_{11,\,12}, \end{array}\right\} \quad \text{(fig. 283)}, \quad (13.30)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} - f_{56} = f_{34} - f_{78}, \\ g_{12} - g_{56} = g_{34} - g_{78}, \end{array}\right\} \quad \text{(fig. 282)}, \quad (13.28)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} - f_7 = f_{34} - f_8 = f_{56} - f_9, \\ g_{12} - g_7 = g_{34} - g_8 = g_{56} - g_9, \end{array}\right\} \quad (13.33)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12} - f_5 = f_{34} - f_6, \\ g_{12} - g_5 = g_{34} - g_6. \end{array}\right\} \quad (13.32)$$

11. Abaques à transparent de forme générale :

$$\left.\begin{array}{l} f_{2k-1,\,2k} = f_{2k-1+2n,\,2k+2n} \cos\varphi - g_{2k-1+2n,\,2k+2n} \sin\varphi + a, \\ g_{2k-1,\,2k} = f_{2k-1+2n,\,2k+2n} \sin\varphi + g_{2k-1+2n,\,2k+2n} \cos\varphi + b, \\ k = 1, 2, \ldots, n, \end{array}\right\} \quad \text{(fig. 279)}, \quad (13.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} (f_{2k-1,\,2k} - f_{12})^2 + (g_{2k-1,\,2k} - g_{12})^2 = \\ \quad = (f_{2k-1+2n,\,2k+2n} - f_{1+2n,\,2+2n})^2 + \\ \quad\quad + (g_{2k-1+2n,\,2k+2n} - g_{1+2n,\,2+2n})^2, \\ \quad\quad k = 2, 3, \ldots, n, \\ (f_{2k-1,\,2k} - f_{34})^2 + (g_{2k-1,\,2k} - g_{34})^2 = \\ \quad = (f_{2k-1+2n,\,2k+2n} - f_{3+2n,\,4+2n})^2 + \\ \quad\quad + (g_{2k-1+2n,\,2k+2n} - g_{3+2n,\,4+2n})^2, \\ \quad\quad k = 3, 4, \ldots, n, \end{array}\right\} \quad \text{(fig. 279)}, \; (13.6) \text{ et } (13.7)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{12}=f_{34}\cos\varphi-g_{34}\,\mathrm{cin}\,\varphi+a, \\ g_{12}=f_{34}\sin\varphi+g_{34}\cos\varphi+b, \end{array}\right\} \quad \text{(fig. 281)}, \quad (13.8)$$

$$(f_{34}-f_{12})^2+(g_{34}-g_{12})^2=(f_{78}-f_{56})^2+(g_{78}-g_{56})^2, \quad \text{(fig. 282)}, \quad (13.9)$$

$$\left.\begin{array}{l} (f_{34}-f_{12})^2+(g_{34}-g_{12})^2=(f_{9,\,10}-f_{78})^2+(g_{9,\,10}-g_{78})^2, \\ (f_{56}-f_{12})^2+(g_{56}-g_{12})^2=(f_{11,\,12}-f_{78})^2+(g_{11,\,12}-g_{78})^2, \\ (f_{56}-f_{34})^2+(g_{56}-g_{34})^2=(f_{11,\,12}-f_{9,\,10})^2+(g_{11,\,12}-g_{9,\,10})^2, \end{array}\right\} \quad \text{(fig. 283)}, \quad (13.10)$$

$$\left.\begin{array}{l} (f_{34}-f_{12})^2+(g_{34}-g_{12})^2=(f_{11,\,12}-f_{9,\,10})^2+(g_{11,\,12}-g_{9,10})^2, \\ (f_{56}-f_{12})^2+(g_{56}-g_{12})^2=(f_{13,\,14}-f_{9,10})^2+(g_{13,\,14}-g_{9,\,10})^2, \\ (f_{78}-f_{12})^2+(g_{78}-g_{12})^2=(f_{15,\,16}-f_{9,\,10})^2+(g_{15,\,16}-g_{9,\,10})^2, \\ (f_{56}-f_{34})^2+(g_{56}-g_{34})^2=(f_{13,\,14}-f_{11,12})^2+(g_{13,\,14}-g_{11,\,12})^2, \\ (f_{78}-f_{34})^2+(g_{78}-g_{34})^2=(f_{15,\,16}-f_{11,\,12})^2+(g_{15,\,16}-g_{11,\,12})^2. \end{array}\right\} \quad \text{(fig. 284)}, \quad (13.11)$$

II. Formes canoniques pour abaques composés constitués d'abaques simples du même type

1. Abaques à entrecroisement composés:

$$\alpha_n=f_{n-1}(\alpha_{n-1},\ f_{n-2}(\alpha_{n-2},\ \ldots,\ f_2(\alpha_2,\ \alpha_1)\underbrace{)\ \ldots)}_{n-3}, \quad \text{(fig. 196)}, \quad (8.12)$$

$$f_n=f_1+f_2+\ \ldots\ +f_{n-1}, \quad (8.13)$$

$$\alpha_6=f_5(\alpha_5,\ f_4(\alpha_4,\ f_3(\alpha_3,\ f_2(\alpha_2,\ \alpha_1)))), \quad \text{(fig. 195, } a\text{)}, \quad (8.11)$$

$$s=P(t,\ \Phi(w,\ \varphi(u,\ v))), \quad \text{(fig. 186)}, \quad (8.9)$$

$$\varphi(u,\ v)=\psi(w,\ t), \quad \text{(fig. 174)}, \quad (8.2)$$

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ f(\alpha) & g(\alpha) & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} f(\alpha) & g(\alpha) & 1 \\ f_3(w) & g_3(w) & 1 \\ f_4(t) & g_4(t) & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \text{(fig. 183)}, \quad (8.7)$$

$$f_{12}=F(f_{34},\ g_{56}), \quad \text{(fig. 198)}, \quad (8.14)$$

$$f_{12}=f_{34}+f_{56}, \quad \text{(fig. 201)}, \quad (8.19)$$

$$f_{12}=f_{34}+f_{35}, \quad \text{(fig. 203)}, \quad (8.20)$$

$$f_{12}+f_{13}=f_{45}+f_{46}, \quad \text{(fig. 209)}. \quad (8.25)$$

2. Abaques composés à points alignés:

a) à échelles:

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ f(\alpha) & g(\alpha) & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} f(\alpha) & g(\alpha) & 1 \\ f_3(w) & g_3(w) & 1 \\ f_4(t) & g_4(t) & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \text{(fig. 184)}, \quad (8.7)$$

$$f_1+f_2=f_3+f_4, \quad \text{(fig. 146)}, \quad (6.33)$$

$$f_1+f_2=f_3f_4, \quad \text{(fig. 147)}, \quad (6.34)$$

$$f_1+f_2+f_3=f_4f_5, \quad \text{(fig. 148)}, \quad (6.35)$$

$$f_1f_2+g_2=f_3f_4, \quad \text{(fig. 149)}; \quad (6.36)$$

b) à contacts tangentiels :

$$\alpha_6 = f_5(\alpha_5, f_4(\alpha_4, f_3(\alpha_3, f_2(\alpha_2, \alpha_1)))), \quad \text{(fig. 195, } b\text{)}, \quad (8.11)$$

$$s = P(t, \Phi(w, \varphi(u, v))), \quad \text{(fig. 192)}, \quad (8.9)$$

$$\varphi(u, v) = \psi(w, t), \quad \text{(fig. 180) ;} \quad (8.2)$$

c) à champs binaires et familles de lignes :

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} f_{12}(\alpha_1, \alpha_2) & g_{12}(\alpha_1, \alpha_2) & 1 \\ f_{34}(\alpha_3, \alpha_4) & g_{34}(\alpha_3, \alpha_4) & 1 \\ f_5(\alpha, \alpha_5) & g_5(\alpha, \alpha_5) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} f_5(\alpha, \alpha_5) & g_5(\alpha, \alpha_5) & 1 \\ f_{67}(\alpha_6, \alpha_7) & g_{67}(\alpha_6, \alpha_7) & 1 \\ f_{89}(\alpha_8, \alpha_9) & g_{89}(\alpha_8, \alpha_9) & 1 \end{vmatrix} = 0, \end{array}\right\} \quad \text{(fig. 185)}, \quad (8.8)$$

$$\frac{f_{34} - f_{12}}{g_{34} - g_{12}} = \frac{f_{78} - f_{56}}{g_{78} - g_{56}}, \quad (12.6)$$

$$f_{56} = \frac{f_{34} - f_{12}}{g_{34} - g_{12}}, \quad (12.7)$$

$$f_1 f_{34} + g_{34} = f_2 f_{56} + g_{56}, \quad (12.8)$$

$$f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}, \quad \text{(fig. 212 et 213)}, \quad (8.25)$$

$$\alpha_6 = f_5(\alpha_5, f_4(\alpha_4, f_3(\alpha_3, f_2(\alpha_2, \alpha_1)))), \quad \text{(fig. 195, } c\text{)}, \quad (8.11)$$

$$s = P(t, \Phi(w, \varphi(u, v))), \quad \text{(fig. 193)}, \quad (8.9)$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ F(f_{34}) & G(f_{34}) & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{(fig. 151)}, \quad (6.58)$$

$$f_1 + f_2 = f_{34}, \quad (6.61)$$

$$f_{12} f_4 + f_3 g_4 + h_4 = 0, \quad (6.62)$$

$$f_{12} f_5 + f_{34} g_5 + h_5 = 0, \quad (6.63)$$

$$f_{12} f_{45} + f_3 g_{45} + h_{45} = 0, \quad (6.34)$$

$$f_{12} f_{56} + f_{34} g_{56} + h_{56} = 0, \quad (6.65)$$

$$f_{12} = \frac{f_3 + f_4}{g_3 + g_4}, \quad (6.66)$$

$$F(u, v, w) = 0, \quad \text{(fig. 89)}. \quad (4.1)$$

3. Abaques composés à points équidistants :

$$f_{12} + f_{1,n} = f_{34} + f_{56} + \cdots + f_{n-2,\, n-1}, \quad (9.24)$$

$$f_{12} + f_{17} = f_{34} + f_{56}, \quad (9.25)$$

$$\alpha_6 = f_5(\alpha_5, f_4(\alpha_4, f_3(\alpha_3, f_2(\alpha_2, \alpha_1)))), \quad \text{(fig. 195, } d\text{)}, \quad (8.11)$$

$$s = P(t, \Phi(w, \varphi(u, v))), \quad \text{(fig. 194)}, \quad (8.9)$$

$$F(u, v, w) = 0, \quad \text{(fig. 90)}. \quad (4.1)$$

4. Abaques au compas composés:

$$f_{12}+f_{13}+f_{45}+f_{46}+\cdots+f_{n-5,\,n-4}+f_{n-5,\,n-3}=$$
$$=f_{n-2,\,n-1}+f_{n-2,\,n}, \qquad (10.21)$$

$$f_{12}+f_{13}+f_{45}+f_{46}=f_{78}+f_{79}, \qquad \text{(fig. 248)}. \qquad (10.22)$$

5. Abaque barycentrique composé:

$$f_7=F(f_{12}+f_{34}+f_{56},\ g_{12}+g_{34}+g_{56}). \qquad (11.22)$$

6. Règle à plusieurs curseurs:

$$f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n=0. \qquad (2.1)$$

III. Formes cononiques pour abaques composés constitnés d'abaques simples de type divers

1. Abaques composés à points alignés et abaques à entrecroisement:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ F(f_{34}) & G(f_{34}) & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad \text{(fig. 150)},\ (6.58)$$

$$f_1+f_2=f_{34}, \qquad (6.61)$$

$$f_{12}f_4+f_3g_4+h_4=0, \qquad (6.62)$$

$$f_{12}f_5+f_{34}g_5+h_5=0, \qquad (6.63)$$

$$f_{12}f_{45}+f_3g_{45}+h_{45}=0, \qquad (6.64)$$

$$f_{12}f_{56}+f_{34}g_{56}+h_{56}=0, \qquad (6.65)$$

$$f_{12}=\frac{f_3+f_4}{g_3+g_4} \qquad (6.66)$$

$$f_{12}=F(f_{34},\ f_{56}). \qquad (8.14)$$

2. Abaque composé à points équidistants et abaque à entrecroisement:

$$f_{12}=F(f_{34},\ f_{56}). \qquad (8.14)$$

3. Abaques composés à points alignés et à points équidistants:

$$f_{12}=f_3+f_4f_{56}+g_{56}, \qquad \text{(fig. 276)},\ (12.16)$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ F(f_{34}) & G(f_{34}) & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad (6.58)$$

$$f_1+f_2=f_{34}, \qquad (6.61)$$

$$f_{12}f_4+f_3g_4+h_4=0, \qquad (6.62)$$

$$f_{12}f_5+f_{34}g_5+h_5=0, \qquad (6.63)$$

$$f_{12}f_{45}+f_3g_{45}+h_{45}=0, \qquad (6.64)$$

$$f_{12}f_{56}+f_{34}g_{56}+h_{56}=0, \qquad (6.65)$$

$$f_{12}=\frac{f_3+f_4}{g_3+g_4}. \qquad (6.66)$$

4. Abaque composé à points alignés et au compas :

$$f_{12}+f_{13}=f_4+f_5 f_{67}+g_{67}, \qquad \text{(fig. 277). (12.18)}$$

5. Abaque composé à points alignés et abaque barycentrique :

$$\frac{f_{56}-f_{34}+f_{12}}{g_{56}-g_{34}+g_{12}}=\frac{f_{78}-f_{34}+f_{12}}{g_{78}-g_{34}+g_{12}}, \qquad \text{(fig. 274). (12.12)}$$

6. Abaque composé à points alignés et abaque rhomboïdal :

$$\frac{f_{78}-f_{56}-f_{34}+f_{12}}{g_{78}-g_{56}-g_{34}+g_{12}}=\frac{f_{9,\,10}-f_{56}-f_{34}+f_{12}}{g_{9,\,10}-g_{56}-g_{34}+g_{12}}, \qquad \text{(fig. 275). (12.14)}$$

7. Abaque composé à points équidistants et au compas :

$$f_{12}=f_{34}-f_{35}+f_{67}+f_{68}, \qquad \text{(fig. 278). (12.20)}$$

LISTE DES RELATIONS NOMOGRAPHIQUES

1. Echelles accolées :

$$\beta = 1{,}4\alpha^{2{,}142} \qquad \text{(fig. 71)};$$

$$t = 9{,}81\,\frac{u^3\,(1+u)^3}{1+2u} \qquad \text{(fig. 74)}.$$

2. Abaques à entrecroisement :

a) pour les équations :

$$w = uv \qquad \text{(fig. 82)};$$

$$C = \frac{1}{n}\,R^{2{,}5\sqrt{n}-0{,}13-0{,}75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0{,}1)} \qquad \text{(fig. 84)};$$

$$uw + v\,(e^w - 1) - we^w = 0 \qquad \text{(fig. 86)};$$

b) pour le système d'équations :

$$\left.\begin{aligned} v &= F\,(u,\,t,\,\alpha),\\ v &= \Phi\,(u,\,w,\,\alpha),\end{aligned}\right\} \qquad \text{(fig. 115-117)};$$

$$\text{où } \alpha = \text{const}$$

c) composé :

$$\Pi = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{(1+n\sin^2\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \qquad \text{(fig. 299)}.$$

3. Abaques à points alignés :
a) à échelles pour les équations :

$$uw + v\,(e^w - 1) - we^w = 0 \qquad \text{(fig. 1)};$$

$$C = \frac{1}{n}\,R^{2{,}5\sqrt{n}-0{,}13-0{,}75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0{,}1)} \qquad \text{(fig. 114)};$$

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{w} \qquad \text{(fig. 122, 302)};$$

$$P = 50 + 0{,}75\,(T - 150) + 0{,}25\,(A - 20) \qquad \text{(fig. 124)};$$

$$A = 0{,}0131\,\frac{v^{1{,}37}}{P^{1{,}135}} \qquad \text{(fig. 133)};$$

$$w = -0{,}02uv + 0{,}72u + 51v + 870 \qquad \text{(fig. 137)};$$

$$w^2 = u^2 + v^2 \qquad \text{(fig. 172, 173)};$$

$$\beta = -2\sqrt{1+m^2} + \frac{4\sqrt{1+m^2}-2m}{1-\sqrt{1-(1-\delta Q/100)^3}}$$ (fig. 296);

table à deux entrées (fig. 298);

b) à échelles pour le système d'équations:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{b^2}{8h}, \\ m &= \frac{b}{4h} \end{aligned}\right\}$$ (fig. 128);

c) composés à échelles à double alignement:

$$\delta = 100\,\frac{\log x - Ax^B}{\log x}$$ (fig. 295);

$$\Pi = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{(1+n\sin^2\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$ (fig. 300);

d) à champs binaires pour les équations:

$$t^{u-1} = v\,\frac{\mathrm{Log}\,(w-t)}{w-t-1}$$ (fig. 2);

$$\beta = A\alpha^B$$ (fig. 65);

$$C_1 = Ap\,(z,\ l) + q\,(z,\ l),$$ (fig. 140);

où $p\,(z,\ l) = 6{,}46\cdot 10^{-12} l z^{4,75} + 0{,}91 z,$

$$q\,(z,\ l) = \frac{2{,}39\cdot 10^6}{lz} + \frac{8{,}51\cdot 10^4}{z} + \left(543 - \frac{394}{1+0{,}005\cdot z}\right)\frac{10^4}{z^2} + 0{,}625\,(l-1000)$$

table 24 à trois entrées (fig. 141);

$$\delta C = 100\,[1 - R^{y_0 - 2{,}5\sqrt{n} + 0{,}13 + 0{,}75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0{,}1)}]$$ (fig. 297);

$$K = 50\,(bh+mh^2)\left(\frac{bh+mh^2}{b+2h\sqrt{1+m^2}}\right)^{0{,}223-0{,}31\sqrt{\frac{bh+mh^2}{b+2h\sqrt{1+m^2}}}}$$ (fig. 301);

e) à champs binaires pour les systèmes d'équations:

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= \Pi_g + sq^2, \\ \Pi &= F\,(q) \end{aligned}\right\}$$ (fig. 63);

$$\left.\begin{aligned} v &= F\,(u,\ t,\ \alpha), \\ v &= \Phi\,(u,\ w,\ \alpha) \end{aligned}\right\}$$ (fig. 119);

f) à contacts ponctuels et un contact tangentiel:

$$C = \frac{1}{n}\,R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)}$$ (fig. 105);

$$\left.\begin{aligned} Q &= (bh+mh^2)\,v, \\ v &= C\sqrt{Ri}, \\ \chi &= b+2h\sqrt{1+m^2}, \end{aligned}\right\}$$ (fig. 131),

où

$$R=\frac{bh+mh^2}{b+2h\sqrt{1+m^2}},$$

$$C=\frac{1}{n}R^{2,5\sqrt{n}-0,13-0,75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0,1)},$$

$$m=0, \quad n=0{,}015, \quad b=0{,}5 \text{ m}.$$

4. Abaques à points équidistants :
a) pour les équations :

$$P=50+0{,}75\,(T-150)+0{,}25\,(A-20) \qquad \text{(fig. 220, 221)};$$

$$t=-0{,}02uv+100vw+9uw-1{,}17u+30v-9400w+2844 \qquad \text{(fig. 223)};$$

où

$$\Delta P=lF\,(Q,\ d), \qquad \text{(fig. 225)};$$

$$F\,(Q,\ d)=1{,}21\,\frac{Q}{d^4} \text{ pour } Q<0{,}808d,$$

$$F\,(Q,\ d)=1{,}58\,\frac{Q^{2,333}}{d^{5,333}} \text{ pour } 0{,}808d\leqslant Q\leqslant 1{,}62d,$$

$$F\,(Q,\ d)=5{,}11\left(\frac{0{,}01}{d}+0{,}0274\,\frac{d}{Q}\right)^{0,25}\frac{Q^2}{d^5} \quad \text{pour} \quad Q>1{,}62d$$

$$v=2{,}5u_1^{0,6}u_2^{0,3}u_3^{0,9} \qquad \text{(fig. 226)};$$

$$\frac{\alpha Q^2}{9{,}81}=b^5\,\frac{(1+m\eta_{cr})^3\,\eta_{cr}^3}{1+2m\eta_{cr}} \qquad \text{(fig. 3)};$$

$$\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \qquad \text{(fig. 227)};$$

b) pour les systèmes d'équations :

$$\left.\begin{array}{l} M=bxR_f\,(h_0-0{,}5x), \\ R_aF_a=bxR_f, \\ x\leqslant 0{,}55h_0 \end{array}\right\} \qquad \text{(fig. 228)};$$

$$\left.\begin{array}{l} Q=\dfrac{4\pi\sqrt{i}}{n}\,(0{,}25d)^{2,37+1,25\sqrt{d}-0,375\sqrt{d}(\sqrt{n}-0,1)}, \\ Q=0{,}25\pi d^2v \end{array}\right\} \qquad \text{(fig. 264)};$$

c) composé :

$$\alpha_7=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6 \qquad \text{(fig. 231)}.$$

5. Abaques au compas :
a) pour les équations :

$$P=50+0{,}75\,(T-150)+0{,}25\,(A-20) \qquad \text{(fig. 235)};$$

$$v=2{,}5u_1^{0,6}\,u_2^{0,3}\,u_3^{0,9} \qquad \text{(fig. 240)};$$

$$\alpha_6=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 \qquad \text{(fig. 245)};$$

b) composé :

$$\alpha_9=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8 \qquad \text{(fig. 249)}.$$

6. Abaques barycentriques :
a) pour l'équation :

$$L = 0{,}73 \frac{k_1 m_1 + k_s m_s}{k_s} \log \frac{8 m_s}{\pi d} - 0{,}73 (m_s + m_1) \log \frac{4 m_s}{m_s + m_1} - $$
$$- 1{,}5 (m_1 - m_s) \left(\frac{k_1 - k_s}{k_1 + k_s} \right)^2 \log \frac{k_1 m_1 + k_s m_s}{k_1 m_1}, \qquad \text{(fig. 265)}$$

b) pour les systèmes d'équations :

$$\left. \begin{aligned} v &= C \sqrt{Ri}, \\ Q &= \omega v, \end{aligned} \right\} \qquad \text{(fig. 260)};$$

où

$$C = \frac{1}{n} R^{2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0,1)},$$

$$\omega = d^2 \left[0{,}25 \ \arccos (1 - 2\eta) - (0{,}5 - \eta) \sqrt{\eta - \eta^2} \right],$$

$$R = d \frac{0{,}25 \arccos (1 - 2\eta) - (0{,}5 - \eta) \sqrt{\eta - \eta^2}}{\arccos (1 - 2\eta)}$$

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{4\pi \sqrt{i}}{n} (0{,}25 d)^{2,37 + 1,25\sqrt{d} - 0,375\sqrt{d}(\sqrt{n} - 0,1)}, \\ Q &= 0{,}25 \pi d^2 v \end{aligned} \right\} \qquad \text{(fig. 264)}.$$

7. Abaque rhomboïdal :

$$\alpha_7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \qquad \text{(fig. 268)}.$$

8. Règles à plusieurs curseurs :
a) à un curseur :

$$P = 50 + 0{,}75 (T - 150) + 0{,}25 (A - 20) \qquad \text{(fig. 41)};$$

$$v = \frac{184}{T^{0,2} t^{0,18} s^{0,35}} \qquad \text{(fig. 44)};$$

b) à deux curseurs :

$$M = \frac{C_p t \delta \, D s^{0,75}}{150\,000} \qquad \text{(fig. 47)};$$

c) à trois curseurs et une famille de lignes constantes :

$$\frac{\alpha Q^2}{9{,}81} = \frac{(b h_{cr} + m h_{cr}^2)^3}{b + 2 m h_{cr}} \qquad \text{(fig. 51)}.$$

9. Abaques à transparent orienté :
a) pour les équations :

$$v = A (e^{Bt} - 1) \qquad \text{(fig. 287)};$$

$$w = u + v + \frac{A}{u} + \frac{B}{v} + \frac{C}{uv} \qquad \text{(fig. 288)}.$$

b) pour les systèmes d'équations :

$$\left.\begin{aligned} M &= bxR_f\,(h_0 - 0{,}5x), \\ R_a F_a &= bxR_f, \\ x &\leqslant 0{,}55h_0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(fig. 289)} ;$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{\sqrt{i}}{n} R^{2{,}5\sqrt{n}+0{,}37-0{,}75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0{,}1)}, \\ Q &= d^2 v\,[0{,}25 \arccos(1-2\eta) - (0{,}5-\eta)\sqrt{\eta-\eta^2}], \\ R &= d\,\frac{0{,}25 \arccos(1-2\eta) - (0{,}5-\eta)\sqrt{\eta-\eta^2}}{\arccos(1-2\eta)}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(fig. 290)}.$$

INDEX ALPHABÉTIQUE

Abaque
— approché 325, 326
— — de Tchébychev 362
— barycentrique 256-276, 259, 318
— — en chaîne 272
— —, champ central 258
— —, champs extrêmes 258
— — composé 272
— —, échelle extrême 269
— cartésien 78
— — rectiligne 83, 84
— — — approché 107, 109
— au compas 205-207, 211, 234-256, 280, 281, 287, 288, 300
— — — adapté 211, 234-256, 281, 287, 288, 318
— — — adapté composé 253-255
— — — adapté, forme canonique 205, 234
— — — général 207, 280, 294
— composé 7, 284, 326
— — à points alignés 90, 117, 120, 121, 162-166, 190, 194, 195, 209, 283
— — à points alignés au compas 287
— — à points alignés à contacts tangentiels 189, 195, 197
— — à points alignés à double alignement 90, 162-166, 189, 191, 195
— — à points alignés à double alignement à échelle 190
— — à points alignés à double alignement à échelle muette 162, 163, 189, 208, 283
— — à points alignés à double alignement géné al à quatre champs et une famille de lignes 190
— — à points alignés à entrecroisement 121, 165, 166
— — à points alignés et équidistants 90, 287
Abaque approché à points alignés à plusieurs alignements 162, 194, 197
— — à points alignés à points fixes et familles de lignes 90, 196, 197
Abaque à un degré de liberté de déplacement du transparent 34-43, 48, 210, 296-301
— à un degré de liberté de déplacement du tr nsparent, répétition des variables auxiliaires 306
— dual 94
— à entrecroisement 74-114, 165-166, 186-211
— — — en chaîne 196, 198
— — — composé à quatre variables 186-188
— — — composé à quatre variables, approché 188
— — — composé à quatre variables, rectiligne 180, 190
— — — composé ramifié 199, 205
— — — constitué de deux familles de droites et une famille de courbes 94, 98
— — — constitué de trois familles de droites 94
— — — constitué d'une famille de droites et de deux familles de courbes 94, 97, 98
— — — général 74, 94, 96
— — —, méthode de construction analytique 75
— — —, méthode de construction synthétique 75
— — — rectiligne 76, 94, 100, 114, 115
— — — rectiligne approché 108-114
— fractionné 318
— à index en équerre 283, 284, 296
— à index parallèle 207, 208, 281-283
— à index parallèle, général 208, 281-283

Abaque à points alignés 56-64, 68, 88-89, 92-166, 179-185, 189-192, 194-196, 208, 283-287, 293, 294, 318, 330-332
— — — — à champs binaires 56-64, 97, 114 117, 119, 147-153, 157, 159, 162, 166, 189-192, 194, 195, 197, 208, 283
— — — — à contacts tangentiels (simple) 94-99, 115, 137-140
— — — — à deux échelles concourantes rectilignes et à champ 56, 57, 59-64, 147
— — — — à deux échelles parallèles et à champ 148-153
— — — — à deux échelles parallèles et une échelle curviligne 104-111, 121-125
Abaque à points alignés
— — — — à deux échelles rectilignes concourantes et une échelle curviligne 102, 121
— — — — à échelle simple 100, 117, 118, 121-137, 140-147, 154-162
— — — — à échelle simple, forme canonique 116, 117
— — — — à échelles rectilignes concourantes 125, 126, 182-185
— — — — à trois champs 59, 60, 88, 96, 97, 102, 115-118
— — — — à trois champs, forme canonique 59, 116, 117
— — — — à trois échelles parallèles 127-130, 143, 182, 183, 256
— — — — à point fixe, champs et échelle (simple) 88, 89, 115, 166, 189, 190, 325
— — — — pour une équation 117, 121-131, 140-166, 179-185, 189-192, 194-196, 208, 283, 284
— — — — pour une équation d'ordre nomographique trois 118, 120, 156, 159
— — — — pour un système d'équations 58, 117, 124, 130-140, 293, 294
— — — — pour un système d'équations, forme canonique 58, 116
Abaque à points équidistants 202-204, 212-233, 241, 245, 265-268, 277-279, 287, 288, 318
— — — — adapté 204, 212-233, 241, 245, 265-268, 279, 287, 288
— — — — adapté, forme canonique 202, 212
— — — —, champ des centres 203, 277
Abakue à points equidistants champ des intersections 203, 277
— — — — composé 90, 195, 229-233
— — — — composé à champs des intersections communs 231
— — — — composé à champs des intersections et des centres communs 230
Abaque à points équidistants
— — — —, échelle des centres 215, 220
— — — —, échelle des intersections 215, 220
— — — — général 90, 203, 204, 277
— — — — général, forme canonique 277
— — — — à points fixes 89-90, 189, 196, 197, 279, 280
— — — — pour la forme de Cauchy à champ 278
— — — —, transparent 204
— à résolution totale 75, 243
— rhomboïdal 272-276, 286, 302, 310
— à une rotation du transparent 300
— simple 7, 325
— — à points alignés 117
— à système d'échelles accolées 73
— à une translation du transparent 34-42, 48, 210, 296-299
— à une translation du transparent, transformation en abaque au compas 300
— à transparent orienté 68, 194, 199-201, 204, 208-210, 296, 301-316, 318, 331
— à transparent orienté représentatif de relations à plusieurs variables complexes 306
— à transparent orienté, répétition des variables auxiliaires 306
— à transparent orienté, transformation en abaque rhomboïdal 302
Abaques à points alignés et barycentrique 285
— — — — et au compas 287
— — — — et rhomboïdal 286
Application orienté du transparent 204
Approximation de Tchébychev d'une fonction logarithmique par une fonction puissance 68
— — — d'une fonction d'une, de deux et de trois variables 64-68

Canevas de probabilité 16
Case tabulaire
— — à deux entrées 143, 151
— — — trois entrées 151

Champ binaire 7, 13
— —, alignement des données empiriques 63, 64
— —, dissociation des familles de lignes 315, 316
— —, équations 13
— — rectiligne 67
— —, tracé 14
Compas à trois pointes 261
Construction
— d'échelles et de champs binaires par la méthode d'intersections 106-107, 110, 114, 125, 132, 135, 136, 146, 152, 153
— d'esquisses d'abaques à l'aide d'une imprimante 333
Contact
— double 211, 291
— ponctuel 291
— simple 205, 291
— tangentiel 291
Contacts tangentiels
— — dants les abaques 94-100, 121, 137-140, 151, 189, 195, 197, 291-292, 308-310
— —, lien avec les extrémums des relations 96, 97, 292, 310
— — mixtes 99
— —, tracé des lignes d'après des exemples 96, 99, 137-140, 189, 194
— — utilisés dans la résolution des problèmes d'extrémums 96, 97, 149-151, 292, 308-310
Courbe duale 92

Directrice 194, 201
Directrices 73, 194
Disposition de la clef 330
Droite
— de l'infini 173, 175, 178, 208
— représentative d'une fonction dans un champ binaire 56, 59, 62, 64, 115
— résolvante 57, 94

Ecartement résolvant du compas 300
Echelle 11
— arithmétique 15
— binaire 165-166
—, canevas 37, 46
—, équation 11
— fonctionnelle 15, 33, 71
—, graduation 12
—, graduation approchée 33
— logarithmique 15, 20-27
Echelle logarithmique, canevas 23, 24
— —, module 22
— —, périodicité 21, 22
— métrique 15, 17-20
— —, canevas 38, 39, 132
— —, module 17
—, module 15, 17
— muette (ou constante) 162, 189, 208
—, problème direct 12
—, problème inverse 13
— projective 15, 28-33, 144, 152, 283
Echelle
— des puissances 15
— quadratique 15
— rectiligne 15
— régulière 15
— de résolution 36
—, sens 11, 36
—, support 11
Echelles des règles logarithmiques 23
Echelon 11, 21, 147
Eléments de l'abaque 7
Emploi
— des abaques pour le choix des paramètres de formules empiriques 52, 53, 62, 294, 306-310, 318
— — — pour le choix des paramètres de formules empiriques du type produit de puissances 52-59, 62, 64
— — — dans les problèmes d'interpolation 294
— des calculatrices pour le calcul des abaques 330, 333
— — — et des traceurs de courbes pour la construction des abaques 15, 330, 332
Equation
— complète d'ordre nomographique quatre 119, 157-160
— — — — — à champ 120, 159
— — — — trois 118, 120
— de Soreau 119, 155-160, 162
Erreur
— d'approximation 108, 318
— de calcul introduite par une échelle logarithmique 27, 28
— géométrique 17, 27, 28
— d'utilisation d'un abaque 317, 318
Extrémums d'une relation 96, 292

Faisceau de droites équidistantes 32
Famille
— de droites horizontales directrices 194

Famille logarithmique de droites parallèles 25, 26, 82, 108, 187
— régulière de droites parallèles 20
Fonction homographique 15, 29, 37
Fonds d'un abaque 34, 194, 289
Forme
— de Cauchy 83, 84, 103, 119, 120, 122, 123, 127, 140, 161
— — — à champ 119, 120
— — — — —, variante 57, 119, 147, 148
— —, variante 103, 118
— de Clark 119, 154-157
— — — à champ 119, 120, 157
— de Soreau 119, 161-162
— — — à deux champs 120, 162
— — — à un champ 119, 162

Graphe
— d'une fonction dans un champ binaire 49, 64, 67, 68
— rectiligne d'une fonction dans un réseau cartésien 50, 70
— — — — — — — logarithmique 50, 51, 67-70

Homologie 171, 173-183, 208, 283
—, axe 173-183, 208
—, centre (pôle) 173-183
—, formules 177-179, 185
—, points homologues 173-184

Interpolation
— nomographique 294
— à vue 12

Ligne
— cotée 13
— polygonale résolvante 196
Lignes d'égales erreurs 64
Limites de variation complètes et incomplètes de la variable de résolution 122, 318

Nomographie 7

Papier
— en coordonnées polaires 16
— fonctionnel 16
— logarithmique 16, 23, 25, 50-51, 54, 55, 78
Papier semi-logarithmique 16, 20, 25, 82
— sinusoïdal 16
Paramètres de transformation 71
Plan mobile
— — d'un abaque 34, 194
— — opaque 303
Point
— coté 11, 12, 13
— fixe comme élément de l'abaque 37, 38, 43, 89
— à l'infini 173, 175
— résolvant (ou de résolution) 75, 94
Points homologues 173
Pôle 173
Positionnement des échelles et des champs d'après un exemple numérique 36, 40, 42, 214, 216, 275
Précision des réponses 317, 318
Principe de dualité 90, 108, 114
— — — en nomographie 94
Problème
— de représentabilité 330, 331
— d'unicité en nomographie 330, 331

Règle
— à deux curseurs 42-46
— de Drobychev 329
— à plusieurs curseurs 34, 43
— à trois curseurs 47
— à un curseur 34-42, 48, 143
— — — — et viseur 48
Réseau
— cartésien 49-50, 69, 70
— fonctionnel 16, 50, 59, 75, 269
— logarithmique 16, 50-55, 68, 69, 78
— —, alignement des données empiriques 53, 54, 55
— —, graduation 54-56
— métrique 16, 17, 78, 79
— semi-logarithmique 16, 82
— transformé par projection 16
— triangulaire 16

Système de coordonnées obliques 104, 148, 202, 205, 211, 282
Tracé
— des abaques 15, 326, 329, 332
— — — avec une machine 332
Trait 11, 21
—, longueur 11
— muet 11, 12
— support 11

Transformation
— affine 170-173, 177
— corrélative 94, 98, 100, 114, 189
Transformations
— non projectives d'abaques à points alignés 120
— projectives d'abaques 120, 208, 283, 330
— — —, formules 102, 167
Translation le long d'un axe 171
Triangle d'échelles
— — logarithmiques 23, 24, 137
— — métriques 18, 19

Variable de résolution 37, 215, 241, 269, 318

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos . . . .

Introduction . . . .

Chapitre premier. ÉLÉMENTS DES ABAQUES . . . .

§ 1.1. Echelle . . . .
§ 1.2. Champ binaire . . . .
§ 1.3. Echelles rectilignes . . . .
§ 1.4. Réseaux fonctionnels rectilignes . . . .
§ 1.5. Echelle métrique . . . .
§ 1.6. Méthodes simplifiées de construction d'échelles métriques . .
§ 1.7. Echelle logarithmique . . . .
§ 1.8. Méthodes simplifiées de construction d'échelles logarithmiques
§ 1.9. Erreur de calcul introduite par une échelle logarithmique . .
§ 1.10. Echelle projective . . . .

Chapitre 2. RÈGLES À PLUSIEURS CURSEURS

§ 2.1. Sur les abaques du type règle à calcul . . . .
§ 2.2. Règles à un curseur . . . .
§ 2.3. Méthode de construction des règles à un curseur . . . . . .
§ 2.4. Cas général de règles à plusieurs curseurs . . . .

Chapitre 3. GRAPHES DE FONCTIONS ET ÉCHELLES ACCOLÉES .

§ 3.1. Notion de graphe de fonction . . . .
§ 3.2. Choix des paramètres dans les formules empiriques du type produit de puissances . . . .
§ 3.3. Exemple de choix des paramètres dans des formules empiriques du type produit de puissances . . . .
§ 3.4. Droite représentative d'une fonction dans un champ binaire et son lien avec des abaques à points alignés . . . .
§ 3.5. Emploi des graphes rectilignes de fonctions dans un champ binaire pour la résolution de systèmes d'équations . . . .
§ 3.6. Emploi des graphes rectilignes de fonctions dans un champ binaire pour le choix des paramètres des formules empiriques .
§ 3.7. Emploi des graphes rectilignes de fonctions dans un champ binaire pour une approximation de Tchébychev de fonctions . .
§ 3.8. Transformation du graphe d'une fonction dans une échelle accolée . . . .
§ 3.9. Méthode analytique de construction d'une échelle accolée . .
§ 3.10. Abaques à système d'échelles accolées . . . .

Chapitre 4. ABAQUES À ENTRECROISEMENT . . . .

§ 4.1. Abaque à entrecroisement général . . . .
§ 4.2. Abaque à entrecroisement rectiligne . . . .
§ 4.3. Abaque cartésien . . . .
§ 4.4. Abaque cartésien rectiligne . . . .

Chapitre 5. TRANSFORMATION DES ABAQUES À ENTRECROISEMENT EN ABAQUES À POINTS ALIGNÉS ET À POINTS ÉQUIDISTANTS . . . .

§ 5.1. Méthode générale de transformation des abaques à entrecroisement en abaques à points alignés et à points équidistants . .
§ 5.2. Principe de dualité . . . .
§ 5.3. Transformation d'un abaque à entrecroisement à trois familles de courbes en un abaque à alignement à trois contacts tangentiels . . . .
§ 5.4. Transformation des abaques à entrecroisement constitués de familles de droites et de courbes en abaques à alignement à contacts mixtes . . . .
§ 5.5. Transformation d'un abaque à entrecroisement rectiligne en un abaque à alignement à trois contacts ponctuels . . . .
§ 5.6. Transformation d'un abaque cartésien rectiligne en un abaque à points alignés à échelles rectilignes concourantes et à une échelle curviligne . . . .
§ 5.7. Transformation d'un abaque cartésien rectiligne en un abaque à points alignés à deux échelles parallèles et une échelle curviligne
§ 5.8. Abaque cartésien rectiligne approché et sa transformation en un abaque dual . . . .

Chapitre 6. MÉTHODE DE CONSTRUCTION DES ABAQUES À POINTS ALIGNÉS . . . .

§ 6.1. Déduction de la forme canonique fondamentale représentable par un abaque à points alignés . . . .
§ 6.2. Classification des abaques à points alignés . . . .
§ 6.3. Abaques à points alignés à deux échelles rectilignes et une échelle curviligne . . . .
§ 6.4. Abaque à points alignés à échelles rectilignes concourantes . .
§ 6.5. Abaque à points alignés à trois échelles rectilignes parallèles .
§ 6.6. Abaque à points alignés à échelles parallèles pour un système de deux équations . . . .
§ 6.7. Exemple de construction d'un abaque à points alignés à échelles logarithmiques parallèles pour un système de deux équations .
§ 6.8. Abaque à points alignés à trois échelles parallèles et une famille de lignes . . . .
§ 6.9. Abaque à points alignés à deux échelles parallèles et une échelle rectiligne oblique . . . .
§ 6.10. Abaque à points alignés pour une formule d'interpolation linéaire successive dans des tableaux à deux entrées . . . .
§ 6.11. Abaques à points alignés à deux échelles rectilignes et à champ .
§ 6.12. Abaque à points alignés pour la formule d'interpolation linéaire successive dans les tableaux à trois entrées . . . .
§ 6.13. Abaque à points alignés pour la forme de Clark . . . .
§ 6.14. Abaque à points alignés pour une équation complète d'ordre nomographique quatre . . . .
§ 6.15. Abaque à points alignés pour la forme de Soreau . . . . . .
§ 6.16. Abaques composés élémentaires à points alignés . . . . . .
§ 6.17. Abaques à points alignés à échelle binaire . . . .

Chapitre 7. TRANSFORMATION PROJECTIVE D'ABAQUES . . . .
§ 7.1. Transformation projective générale d'abaques . . . . . .
§ 7.2. Transformation affine . . . .
§ 7.3. Propriétés fondamentales de l'homologie . . . .
§ 7.4. Déduction des formules d'homologie . . . .
§ 7.5. Méthode d'application de l'homologie . . . .

Chapitre 8. ABAQUES À ENTRECROISEMENT COMPOSÉS ET LEUR TRANSFORMATION EN ABAQUES D'AUTRES TYPES . . . .
§ 8.1. Abaques à entrecroisement composés pour équations à quatre variables et leur transformation en d'autres types d'abaques . .
§ 8.2. Abaques à entrecroisement composés pour équations à cinq variables et leur transformation en d'autres types d'abaques . .
§ 8.3. Abaques à entrecroisement en chaîne pour équations à plusieurs variables et leur transformation en d'autres types d'abaques . .
§ 8.4. Abaques à entrecroisement ramifiés pour équations à six variables et leur transformation en d'autres types d'abaques . . . .
§ 8.5. Abaque à entrecroisement ramifié pour l'équation $f_{12} = f_{34} + f_{35}$ et sa transformation en un abaque adapté à points équidistants . . . .
§ 8.6. Abaque à entrecroisement ramifié pour l'équation $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$ et sa transformation en un abaque adapté au compas et en d'autres types d'abaques . . . .

Chapitre 9. MÉTHODE DE CONSTRUCTION DES ABAQUES ADAPTÉS À POINTS ÉQUIDISTANTS . . . .
§ 9.1. Déduction de la forme canonique fondamentale représentable par un abaque adapté à points équidistants . . . .
§ 9.2. Méthode de construction d'un abaque adapté à points équidistants pour la forme canonique fondamentale $f_{12} = f_{34} + f_{35}$ . .
§ 9.3. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_1 = f_2 + f_3$
§ 9.4. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_{14} = f_{24} + f_{34}$
§ 9.5. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_{12} = f_3 + f_4$
§ 9.6. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$ . . . .
§ 9.7. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_{12} = f_{34} + f_5$
§ 9.8. Abaque adapté à points équidistants pour la forme $f_1 + f_2 = f_3 + f_4 + f_5$ . . . .
§ 9.9. Abaques adaptés à points équidistants pour un système d'équations . . . .
§ 9.10. Abaques composés adaptés à points équidistants . . . . . .

Chapitre 10. MÉTHODE DE CONSTRUCTION DES ABAQUES AU COMPAS ADAPTÉS . . . .
§ 10.1. Déduction de la forme canonique représentable par un abaque au compas adapté . . . .
§ 10.2. Méthode de construction d'un abaque au compas adapté pour la forme canonique $f_{12} + f_{13} = f_{45} + f_{46}$ . . . .
§ 10.3. Abaques au compas adaptés pour formes canoniques à trois variables . . . .
§ 10.4. Abaques au compas adaptés pour formes canoniques à quatre variables . . . .
§ 10.5. Abaques au compas adaptés pour formes canoniques à cinq variables . . . .

§ 10.6. Abaques au compas adaptés pour formes canoniques à six variables . . . .
§ 10.7. Abaques au compas adaptés pour systèmes d'équations . . .
§ 10.8. Abaques au compas adaptés composés . . . .

Chapitre 11. ABAQUES BARYCENTRIQUES . . . .

§ 11.1. Transformation des abaques à points alignés à échelles parallèles en un abaque barycentrique . . . .
§ 11.2. Méthode de construction des abaques barycentriques . . . . .
§ 11.3. Rattachement de certains cas particuliers d'abaques barycentriques à des abaques adaptés à points équidistants . . . . . .
§ 11.4. Abaques barycentriques pour des relations entre cinq variables .
§ 11.5. Abaques barycentriques composés . . . .
§ 11.6. Méthode de construction des abaques rhomboïdaux . . . . .

Chapitre 12. AUTRES TYPES D'ABAQUES À UN PLAN . . . . . .

§ 12.1. Abaque général à points équidistants . . . .
§ 12.2. Abaque général au compas . . . .
§ 12.3. Abaque à index parallèle . . . .
§ 12.4. Abaque à index en équerre . . . .
§ 12.5. Abaques composés . . . .

Chapitre 13. ABAQUES À TRANSPARENT

§ 13.1. Abaque à transparent général . . . .
§ 13.2. Cas particuliers de l'abaque à transparent général . . . . . .
§ 13.3. Abaques à un degré de liberté du déplacement du transparent .
§ 13.4. Abaques à transparent orienté . . . .
§ 13.5. Méthode de construction d'abaques à transparent orienté . .
§ 13.6. Abaques à transparent orienté pour certaines formes canoniques transformables . . . .

Chapitre 14. PROBLÈMES GÉNÉRAUX DE LA NOMOGRAPHIE PRATIQUE ET THÉORIQUE . . . .

§ 14.1. Application des abaques au calcul . . . .
§ 14.2. Application des abaques à l'étude de relations fonctionnelles .
§ 14.3. Abaques exacts et approchés . . . .
§ 14.4. Tracé et mise au net des abaques . . . .
§ 14.5. Problèmes de la nomographie théorique . . . .
§ 14.6. Sur les liens des abaques avec les calculatrices . . . . . .

Bibliographie . . . .

Liste des formes canoniques . . . .

Liste des relations nomographiques . . . .

Index alphabétique . . . .

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse :
2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique